АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI
10
1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместитель гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, Л. А. ЖЕКУЛИН, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

MTA. Számtechn. Könyvtára
Leltározva
1962. év 482 sz.

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI ОКТЯБРЬ, 1961 **Вып. 10**

СОДЕРЖАНИЕ

Шаров А. И. Идеальный прием сигналов оптимального кода 1595
Перепелятник П. А. Автоколебания в генераторе с запаздыванием 1601
Яковлев В. П. Синхронизация автогенератора слабомодулированной внешней силой 1609
Григорьев Ю. В., Хохлов Р. В. Об автогенераторе, параметрически связанном с линейным контуром 1617
Мень А. В. Временные (спектральные) характеристики флуктуаций разностей фаз, возникающих при распространении радиоволн в тропосфере 1625
Бахарева М. Ф. Частотная корреляция флуктуаций амплитуд и фаз при использовании остронаправленной антенны 1636
Сюй Янь-шэн. Влияние металлической стенки на магнитостатические колебания малой гиротропной сферы 1645
Кинбер Б. Е. О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности сферы 1652
Колпаков В. В. Дифракция поверхностных электромагнитных волн на ступеньке импеданса кругового цилиндра 1658
Сморгонский В. Я. Определение собственных частот волн высших типов в коаксиальном кабеле с эллиптическими проводниками 1665
Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Об одной нелинейной задаче теории электромагнитных волн в плазме 1667
Диденко А. Н., Безматерных Л. Н. К расчету прямоугольных волноводов, нагруженных диэлектрическими диафрагмами 1670
Никольский В. В., Сухов В. Г. О методе Ритца для полых систем с анизотропной средой 1677
Лошаков Л. Н. О целесообразной форме выражения для коэффициента связи при взаимодействии электронного потока с пространственными гармониками замедляющей системы 1685
Гласко В. Б., Зюзин-Зинченко А. А., Лопухин В. М. Влияние пульсации сечения электронного потока на коэффициент шума лампы бегущей волны . 1688
Луговой В. Н. О молекулярном генераторе с двумя собственными частотами колебаний резонатора в пределах ширины линии излучения 1700
Фабриков В. А. О новом принципе усиления колебаний СВЧ на ферритах . . . 1707
Соколик А. И. Об эквивалентной схеме цепи отклоняющих пластин электронно-лучевой трубки 1718
Страшкевич А. М. Электростатическая квадрупольная линза, поле которой имеет две плоскости антисимметрии и не имеет плоскостей симметрии 1725
Басалаева Н. Я., Екименко Т. М., Елинсон М. И., Зернов Д. В., Савицкая Я. С., Яснопольская А. А. Исследование некоторых свойств холодного оксидно-магниевого катода с самоподдерживающейся эмиссией 1729
Васильев Г. Ф. Проникновение электрического поля в полупроводник 1741
Первова Л. Я. Определение времени жизни неравновесных носителей тока в полупроводниках по спектральному распределению плотности шума 1745
Куркин Ю. Л., Куркина Н. С. Прецизионные транзисторные усилители для электронных моделирующих устройств с высокими входными (или выходными) сопротивлениями 1749

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Яшкин А. Я. О связи метода неопределенных коэффициентов с методом интегрального уравнения 1757
Мандельштам М. Я. Регулируемый направленный ответвитель с постоянным сдвигом фазы 1761
Зальцман Е. Б., Пояркова В. Е. «Возмущение» резонатора на волну H_{01n} цилиндрическим стержнем 1764
Шушпанов О. Е. Коэффициенты связи для изогнутого коаксиального волновода круглого сечения 1767
Бронштейн И. М., Фрайман Б. С. Вторичная и фотоэлектронная эмиссия при адсорбции бериллия и серебра на барии 1769
Яковлев В. Н. Исследование полупроводниковых генераторов импульсов с запаздывающей обратной связью 1770
Бондаренко Б. В., Ермаков С. В., Царев Б. М. Термоэлектронные свойства гафнатов и ренатов бария 1773
Надь Ф. Я. Аномальная вольтамперная характеристика легированного германия 1775

Адрес редакции: Москва, К-9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроники АН СССР, редакция журнала «Радиотехника и электроника»

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-09164 Подписано к печати 27/IX-1961 г. Тираж 6000 экз. Зак. 2170
Формат бум. 70×108 1/16. Печ. л. 15, 75. Бум. л. 5,75 Уч.-изд. листов 16,5

2-я типография Издательства Академии наук СССР, Москва, Шубинский пер., 10

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 10

ИДЕАЛЬНЫЙ ПРИЕМ СИГНАЛОВ ОПТИМАЛЬНОГО КОДА

А. И. Шаров

Рассмотрен способ практического осуществления идеального приемника Котельникова, предназначенного для приема сигналов оптимального кода.

Процесс воздействия помехи на передаваемый сигнал необратим; поэтому приемное устройство воспринимает в качестве переданного сигнала некоторое колебание, представляющее собой смесь сигнала и помехи. Все возможные колебания такого рода, воспринимаемые приемным устройством в качестве переданного сигнала, образуют бесконечное множество, определяемое в некоторой области значений, называемой областью сигнала [1]. Различные приемники, предназначенные для приема одних и тех же сигналов, характеризуются различными областями сигналов, которые, если воспользоваться геометрическим представлением, имеют разные размеры и конфигурации. Очевидно, что всегда желательно иметь такой приемник, т. е. такие размеры и конфигурации областей сигналов, чтобы вероятность правильного приема была максимальной. Приемник, отвечающий этому требованию, называется идеальным.

Идеальные приемники, предназначенные для приема сигналов различных кодов, характеризуются разными областями сигналов с разными размерами и конфигурациями, причем бóльшие размеры этих областей одной и той же конфигурации будут обеспечивать бóльшую вероятность правильного приема; разные конфигурации областей сигналов при одном и том же размере (объеме) будут обеспечивать разные вероятности правильного приема. При этом, конечно, должна существовать какая-то «идеальная» конфигурация области сигнала, которая при определенном виде помехи и постоянном объеме области сигнала обеспечивает максимальную вероятность правильного приема. Нетрудно показать, что такой идеальной конфигурацией при помехе типа «белый шум» будет сфера. Однако построить приемник, который характеризовался бы n-мерными областями сигналов сферической конфигурации при $n>1$, когда число сигналов $N>2$, не представляется возможным. Но при данном n существует наилучшее приближение конфигурации областей сигнала к сферической — «оптимальная» конфигурация, которая получается при плотнейшей укладке сфер с равными радиусами в n-мерном пространстве и представляет собой n-мерный многогранник, описанный около «плотноуложенной» сферы.

Идеальный приемник, характеризующийся такими оптимальными областями сигналов, будет предназначаться для приема сигналов некоторого оптимального кода, который при заданной энтропии и заданном отношении сигнал/помеха обеспечивает максимальную вероятность правильного приема и по мере увеличения n приближается по своим свойствам к идеальному коду Шэннона.

Сигналы, ограниченные по мощности, т. е. ограниченные сферой в геометрической интерпретации, можно подразделить на сигналы с объемно-сферическим распределением и на сигналы с поверхностно-сферическим распределением. Построение оптимального кода, сигналы которого имеют

объемно-сферическое распределение, требует знания плотнейшей укладки сфер в n-мерном пространстве. Построение же оптимального кода, сигналы которого обладают поверхностно-сферическим распределением, также требует знания плотнейшей укладки сфер, но при условии, что все центры сфер лежат на сфере радиуса $\sqrt{nP}$ (P — мощность сигнала).

Сигналы с поверхностно-сферическим распределением имеют преимущество перед сигналами с объемно-сферическим распределением: они не требуют поддержания постоянства уровня сигнала в месте приема.

Плотнейшая укладка для поверхностно-сферического распределения в настоящее время известна лишь для $n \leqslant 3$ [2]. Однако можно воспользоваться плотнейшей укладкой для объемно-сферического распределения сигналов, которая уже найдена для $n \leqslant 10$. Выбрасывание внутренних сфер из плотнейшей укладки для объемно-сферического распределения приводит к образованию некоторого приближения к плотнейшей укладке для поверхностно-сферического распределения; это приближение растет с ростом n. Код с поверхностно-сферическим распределением сигналов, построенный вышеописанным способом из оптимального кода с объемно-сферическим распределением, можно считать также оптиммальным, если принимать во внимание существующие возможности построения плотнейшей укладки с поверхностно-сферическим распределением *.

В данной работе рассмотрено построение идеального приемника для приема сигналов именно такого оптимального кода с поверхностно-сферическим распределением сигналов.

Основная операция, производимая приемником, заключается в отождествлении принятого сигнала, в зависимости от положения его изображающей точки в пространстве сигналов, с тем или иным из сигналов, которые могут быть переданы. Это отождествление производится путем разделения пространства сигналов на ряд неперекрывающихся областей, областей сигналов, которые ставятся в соответствие сигналам кода.

Разделения пространства сигналов на неперекрывающиеся области можно производить посредством задания границ этих областей **, которые обычно представляют собой отрезки гиперплоскостей. В этом случае границы областей могут быть заданы своими уравнениями в исходной системе координат

$$\begin{aligned} l_1(X) + C_1 &= 0, \\ l_2(X) + C_2 &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ l_m(X) + C_m &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $l_i(X)$ — линейная форма n-мерного вектора $X = (X_1 X_2, \ldots, X_n)$; C_i — постоянная.

Если точка принимаемого сигнала, для которой вектор $X = X^0$, не расположена в плоскости границы области, то при подстановке координат этой точки в уравнение границы области $l_i(X) + C_i = 0$ будет иметь место одно из двух неравенств $l_i(X^0) + C_i > 0$ или $l_i(X^0) + C_i < 0$ в зависимости от того, по какую сторону плоскости границы области расположена искомая точка. На этом основании, при подстановке ко-

---

* Для $n = 3$ при одном и том же числе сигналов $N = 12$ существует лучший код, при построении которого используется поверхностно-сферическая плотнейшая укладка [2]. В этом случае наш код не является оптимальным в указанном смысле.

** Для идеального приемника, когда сигналы кода равновероятны, возможно и другое определение областей сигналов как совокупности точек, расположенных ближе к данной точке, соответствующей передаваемому сигналу (образцу), чем к другим.

ординат точки принимаемого сигнала в соответствующее уравнение границы область, по комбинации знаков получающихся результатов можно определить область, где расположена точка принимаемого сигнала, а следовательно, и какой сигнал кода передан.

В простейшем случае это можно видеть на примере приема равновероятных сигналов бинарного кода. Идеальный приемник тогда будет характеризоваться областями сигналов, уравнения границ которых будут

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ X_2 &= 0, \\ &\cdots \\ &\cdots \\ X_n &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь для определения положения точки принимаемого сигнала относительно одной из границ областей требуется знание только одной координаты точки, одного элемента кодовой комбинации. Поэтому в данном случае можно применить последовательное использование элементов кодовой комбинации, которое обычно называется последовательным или поэлементным приемом сигнала. В общем же случае (1) для определения положения точки принимаемого сигнала относительно границ областей необходимо знание всех координат точки, всех элементов кодовой комбинации одновременно. В отличие от поэлементного приема сигналов этот метод приема можно определить как одновременное использование элементов кодовой комбинации, как прием сигнала в целом.

При приеме сигналов, имеющих поверхностное распределение, идеальный приемник будет характеризоваться областями сигналов, уравнения границ которых имеют вид

$$\begin{aligned} l_1(X) &= 0, \\ l_2(X) &= 0, \\ &\cdots \\ &\cdots \\ l_m(X) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь в отличие от случая приема сигналов бинарного кода (2) требуется прием сигнала в целом, а по сравнению с общим случаем (1) отсутствие постоянных C_i упрощает запоминание (фиксирование) уравнений границ областей сигналов в приемном устройстве. Как видно из системы уравнений (3), в приемном устройстве необходимо зафиксировать m уравнений. Но если области сигналов расположены симметрично относительно исходной системы координат, то можно уменьшить число уравнений границ областей, которые должны быть зафиксированы в приемном устройстве. Это можно осуществить посредством симметричного отображения подпространств, различных квадрантов исходной системы координат, на подпространство одного, скажем, положительного квадранта. В этом случае можно ограничиться фиксированием только уравнений границ областей положительного квадранта, рассматриваемых как симметричные отображения границ областей, расположенных в других квадрантах.

Расположение областей сигналов, характеризующих идеальный приемник, зависит от расположения сигналов кода. Симметричное расположение областей будет иметь место только в случае симметричного расположения сигналов кода (при их равновероятности).

Основная особенность расположения точек сигналов оптимального кода заключается в том, что они образуют правильную, но не ортогональную

точечную решетку, которая при соответствующем выборе исходной системы координат дает симметричное расположение точек сигналов.

При идеальном приеме сигналов оптимального кода, имеющих поверхностно-сферическое распределение, границы областей сигналов могут быть представлены системой уравнений

$$\begin{aligned} &B_1^{(1)} X_1 + B_2^{(1)} X_2 + \cdots + B_n^{(1)} X_n = 0, \\ &B_1^{(2)} X_1 + B_2^{(2)} X_2 + \cdots + B_n^{(2)} X_n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &B_1^{(m)} X_1 + B_2^{(m)} X_2 + \cdots + B_n^{(m)} X_n = 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты $B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, \ldots, B_n^{(i)}$ являются координатами некоторого n-мерного вектора, перпендикулярного плоскости i-й границы области, и могут быть вычислены как разности координат точек, соответствующих сигналам кода, которые расположены в соседних областях, имеющих общую границу $B_1^{(i)} X_1 + B_2^{(i)} X_2 + \ldots + B_n^{(i)} X_n = 0$. При m границах областей сигналов требуется произвести m подстановок координат точки принимаемого сигнала в m уравнений границ областей, в результате чего получается комбинация знаков, состоящая из m двоичных элементов (+или—), которая определяет область расположения точки принимаемого сигнала.

Так как сигналы оптимального кода, а следовательно, и области сигналов, характеризующие идеальный приемник, имеют симметричное расположение, то можно ограничиться рассмотрением только уравнений границ областей, расположенных в положительном квадранте. При этом число уравнений границ областей, которые необходимо зафиксировать в приемном устройстве, безусловно сократится. Поскольку фиксируются уравнения границ областей положительного квадранта, то нужно в эти уравнения подставлять координаты не самой точки принимаемого сигнала, а ее симметричного отображения на подпространство положительного квадранта. Следовательно, приемное устройство должно производить дополнительную операцию — симметричное отображение точки принимаемого сигнала. Кроме того, для полного определения положения этой точки относительно областей сигналов необходимо знать положение ее относительно квадрантов исходной системы координат. Оно легко определяется по комбинации знаков координат точки принимаемого сигнала.

Таким образом, положение точки принимаемого сигнала относительно областей сигналов определяется по комбинации знаков координат точки (положение точки относительно квадрантов исходной системы координат) и по комбинации знаков, которая получается в результате подстановки координат симметричного отображения точки принимаемого сигнала в уравнения границ областей положительного квадранта (положение точки относительно областей сигналов внутри квадранта).

При двухзначном оптимальном коде ($n = 2$), имеющем шесть точек сигналов ($N = 6$) со следующими координатами:

Номера точек	1	2	3	4	5	6
X_1	1	-1	-2	-1	$+1$	2
X_2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0

(расстояние между двумя соседними точками $D = 2$), будем иметь три уравнения границ областей

$$\begin{aligned} &-X_1 + \sqrt{3} X_2 = 0, \\ &X_1 = 0, \\ &X_1 + \sqrt{3} X_2 = 0. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что точка принимаемого сигнала A имеет координаты $X_1 = -1$ и $X_2 = +1$ (рис. 1). Координаты симметричного отображения точки A на подпространство положительного квадранта (точка A') будут $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ (рис. 2). Далее, подставляя координаты точки A' в уравнение границ областей положительного квадранта $-X_1 + \sqrt{3}X_2 = 0$, получим

$$-1 + \sqrt{3} \simeq 0{,}73 > 0.$$

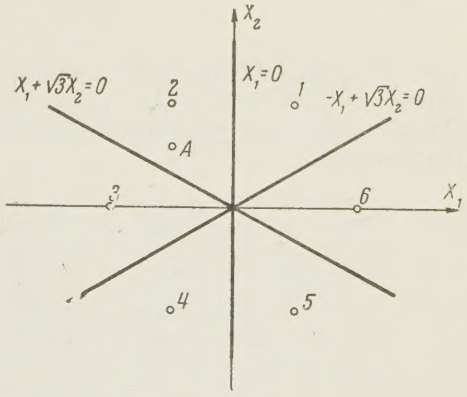


Рис. 1

Тогда комбинация знаков, определяющая область расположения точки A, будет состоять из комбинации знаков, определяющей квадрант расположения точки A (— +), и из комбинации знаков, определяющей область расположения точки A' в положительном квадранте (+), т. е. из — + и +. Обозначая + через 1, а — через 0, получим комбинацию двоичных символов 011, которая и определяет область расположения точки принимаемого сигнала и которая может быть поставлена в соответствие сигналу кода.

При трехзначном «оптимальном» коде* ($n = 3$), имеющем двенадцать точек сигналов ($N = 12$), будем иметь шесть уравнений границ областей. В положительном квадранте будем иметь три точки сигналов с координатами

Номера точек	1	2	3
X_1	1	2	0
X_2	1	0	2
X_3	$\sqrt{2}$	0	0

и две границы областей, уравнения которых

$$-X_1 + X_2 + \sqrt{2}X_3 = 0,$$
$$X_1 - X_2 + \sqrt{2}X_3 = 0.$$

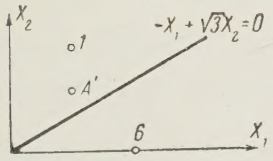


Рис. 2

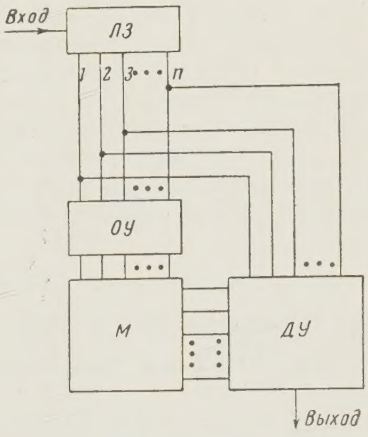


Рис. 3

При четырехзначном оптимальном коде ($n = 4$), имеющем двадцать четыре точки сигналов ($N = 24$), будем иметь двенадцать уравнений границ областей. В положительном квадранте будет пять точек сигналов со следующими координатами:

Номера точек	1	2	3	4	5	Номера точек	1	2	3	4	5
X_1	1	2	0	0	0	X_3	1	0	0	2	0
X_2	1	0	2	0	0	X_4	1	0	0	0	2

* См. первую сноску на стр. 1596.

и четыре границы областей, уравнения которых

$$-X_1+X_2+X_3+X_4=0,$$
$$X_1-X_2+X_3+X_4=0,$$
$$X_1+X_2-X_3+X_4=0,$$
$$X_1+X_2+X_3-X_4=0.$$

При пятизначном оптимальном коде ($n=5$), уже имеющем сорок точек сигналов ($N=40$), будем иметь двадцать уравнений границ областей. В положительном квадранте имеем семь точек сигналов со следующими координатами:

Номера точек	1	2	3	4	5	6	7
X_1	1	2	0	0	0	1	0
X_2	1	0	2	0	0	1	0
X_3	1	0	0	2	0	0	1
X_4	1	0	0	0	2	0	1
X_5	0	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

и одиннадцать границ областей.

Из приведенных примеров видно, что при использовании операции симметричного отображения можно при $n\leqslant 5$ в 2—3 раза сократить число уравнений границ областей, которые должны быть зафиксированы в приемном устройстве, а следовательно, и упростить само приемное устройство.

Приемник, действующий по этому принципу, не содержит сложных устройств. Это можно видеть из блок-схемы, показанной на рис. 3. Здесь прием сигнала в целом осуществляется при помощи линии задержки с отводами (*ЛЗ*); операция симметричного отображения — посредством двухстороннего выпрямления, производимого в отображающем устройстве (*ОУ*). Положение симметричного отображения точки принимаемого сигнала относительно областей положительного квадранта определяется при помощи матричной схемы (*М*), в которой зафиксированы уравнения границ областей сигналов положительного квадранта. Несколько более сложным является декодирующее устройство (*ДУ*). Однако оно осуществляет простые логические операции и может быть составлено из стандартных элементов электронных счетных машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Котельников, Теория потенциальной помехоустойчивости, ГЭИ, 1956.
2. А. А. Харкевич, О наилучшем коде, Электросвязь, 1956, 2, 65.

Поступила в редакцию
29 XI 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 10

АВТОКОЛЕБАНИЯ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

П. А. Перепелятник

Определено общее поведение генератора при изменении запаздывания в широких пределах. Показано, что при больших временах запаздывания автоколебания принципиально не могут быть устойчивыми и переходят в режим самомодуляции. Высказано предположение, что при значительных запаздываниях генератор превращается в генератор шумов.

Для анализа устойчивости периодических решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, к которому приводится система, использован качественный метод, основанный на принципе нарушения перемежаемости корней (критерий Михайлова).

1. ВЫВОД «УКОРОЧЕННЫХ» УРАВНЕНИЙ

На рис. 1 приведена схема исследуемого генератора. Она является лишь моделью, так как полученные выводы могут быть распространены на любые генераторы, использующие для генерации принцип запаздывающей обратной связи. Для упрощения анализа полагаем: 1) устройство задержки ток не потребляет; 2) реакция нагрузки на усилитель отсутствует; 3) токи сетки не учитываются.

Используя приведенные на рис. 1 обозначения, получим уравнение

$$\frac{d^2U_a}{dt^2} + 2\delta\frac{dU_a}{dt} + \omega_0^2 U_a = -2\delta R\frac{di_a}{dt}. \qquad (1)$$

Здесь $2\delta = 1/RC$; $\omega_0^2 = 1/LC$.

Положим

$$i_a = S_1 U_{a\tau} - S_3 U_{\tau a}^3, \quad U_a = Y\cos\psi,$$
$$U_{a\tau} = Y_\tau\cos\psi_\tau = Y_\tau\cos(\psi - \Delta\psi) \qquad (2).$$

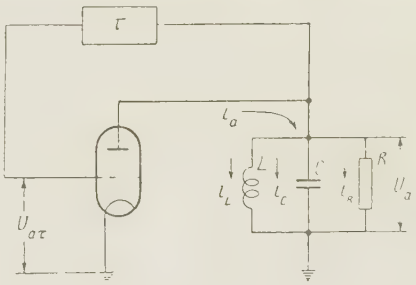


Рис. 1. Схема генератора с запаздыванием

Подставим (2) в (1), произведем гармоническую линеаризацию, отбросим члены, содержащие гармоники основного колебания, выполним некоторые тригонометрические преобразования, приравняем коэффициенты, стоящие слева и справа в (1) при $\cos\psi$ и $\sin\psi$, после чего получим два укороченных уравнения

$$2\dot{Y}\dot{\psi} + Y\ddot{\psi} + 2\delta Y\dot{\psi} - 2\delta K_{\xi\tau}\dot{Y}_\tau\sin\Delta\psi + 2\delta K_{Y\tau}Y_\tau\dot{\psi}_\tau\cos\Delta\psi = 0, \qquad (3)$$
$$\ddot{Y} - Y\dot{\psi}^2 + 2\delta\dot{Y} + \omega_0^2 Y + 2\delta K_{\xi\tau}\dot{Y}_\tau\cos\Delta\psi + 2\delta K_{Y\tau}Y_\tau\dot{\psi}_\tau\sin\Delta\psi = 0.$$

Здесь $K_{Y\tau} = R\left(S_1 - \frac{3}{4}S_3Y_\tau^2\right)$; $K_{\xi\tau} = R\left(S_1 - \frac{9}{4}S_3Y_\tau^2\right)$; K_Y — коэффициент передачи нелинейностью амплитуды первой гармоники высокочастотного колебания; K_ξ — коэффициент передачи нелинейностью возмущения огибающей.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В случае стационарного режима имеем

$$\ddot{Y} = \dot{Y} = 0, \qquad Y = Y_\tau = Y_0,$$
$$\psi = 0, \qquad \psi = \psi_\tau = \omega, \qquad \Delta\psi = \omega\tau. \tag{4}$$

В общем случае $\omega \neq \omega_0$.

Подставляя (4) в (3), получим

$$1 + K_Y \cos \omega\tau = 0,$$
$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta K_Y \omega \sin \omega\tau = 0. \tag{5}$$

Уравнения (5) можно записать в иной форме:

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}\sqrt{K_Y^2 - 1}, \tag{6а}$$

$$\operatorname{tg} \omega\tau = Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right), \tag{6б}$$

где $Q = R\omega_0 C$ — добротность контура.

Уравнение (6а) можно также переписать в виде

$$W(Y_0, \omega) = \frac{K_Y}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 1. \tag{6в}$$

Здесь $W(Y_0, \omega)$ — коэффициент передачи первой гармоники по замкнутой петле обратной связи.

Из уравнений (6) можно получить ряд важных сведений о поведении системы.

1. Из (6а) определяются частоты $\omega_{макс}$ и $\omega_{мин}$, которые могут возбуждаться в системе. Для этого полагаем $Y_0 = 0$; тогда $K_{Y макс} = RS_1$. Зная ω_0, Q и $K_{Y\ макс}$, из (6а) легко найти $\omega_{макс}$ и $\omega_{мин}$. Полосу частот $\Delta\omega_{макс} = \omega_{макс} - \omega_{мин}$ будем в дальнейшем называть полосой прозрачности системы. Она определяется не только параметрами контура, но и параметрами усилителя. Используя (6а), полосу прозрачности можно найти непосредственно из выражения

$$\Delta\omega_{макс} = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{K_{Y\ макс}^2 - 1}. \tag{7}$$

2. Из (6в) также легко найти зависимость амплитуды колебаний от частоты. Для этого вначале определяется

$$K_Y = \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \tag{8}$$

Используя выражение для K_Y в (5), легко построить искомую зависимость.

3. При изменении времени запаздывания от нуля и выше колебания в системе вначале отсутствуют и возникают только при каком-то $\tau_{кр\,1}$ (назовем его первым критическим значением времени запаздывания). При увеличении τ будет наблюдаться чередование областей существования и отсутствия колебаний. Когда в полосе прозрачности системы одновременно могут быть выполнены условия существования периодических колебаний для двух частот, т. е. выполнены условия (6), то при дальнейшем увеличении τ чередование областей исчезнет. Назовем это значение τ вторым критическим значением времени запаздывания $\tau_{кр\,2}$. При любом $\tau > \tau_{кр\,2}$ в системе всегда будут существовать колебания.

В случае если полоса прозрачности системы достаточно велика, чередования областей может и не быть, так как значение $\tau_{кр2}$ попадает в интервал значений τ, определяющих первую область колебаний.

Значения $\tau_{кр1}$, $\tau_{кр2}$ и интервалы τ, определяющие длительности областей существования колебаний, можно найти из выражения

$$\tau = \frac{1}{\omega}\left[\operatorname{arc\,tg}\, Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + (2n+1)\pi\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

которое получено из (6б).

На основании уравнения (9) строится график (рис. 2), который поясняет вышесказанное. Интервалы между началами кривых τ, соответствующих границам областей с разным числом колебаний, при увеличении τ стремятся к величине $\Delta\tau = 2\pi/\omega_{макс}$. Пересечение горизонтальной прямой, соответствующей конкретному значению времени запаздывания, с кривыми значений $\tau(\omega)$ определит число возможных частот колебаний. При достаточно большом τ интервалы между частотами на основании (9) будут определяться выражением $\Delta\omega = 2\pi/\tau$.

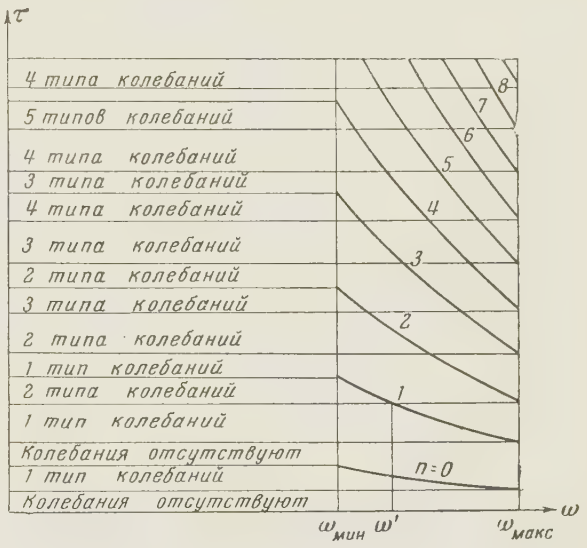


Рис. 2. Кривые значений времени запаздывания в зависимости от частоты

Положив $n = 0$ и $\omega = \omega_{макс}$, из (9) можно определить первое критическое значение времени запаздывания

$$\tau_{кр1} = \frac{1}{\omega_{макс}}\left[\operatorname{arc\,tg}\, Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + \pi\right]. \tag{10}$$

Используя (9), можно в аналитическом виде записать выражение для второго критического значения времени запаздывания. Действительно, для $\tau_{кр2}$ справедливы следующие равенства:

$$\tau_{кр2} = \frac{1}{\omega_{макс}}\left[\operatorname{arc\,tg}\, Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_{макс}} - \frac{\omega_{макс}}{\omega_0}\right) + (2m+1)\pi\right], \tag{11а}$$

$$\tau_{кр2} = \frac{1}{\omega'}\left[\operatorname{arc\,tg}\, Q\left(\frac{\omega_0}{\omega'} - \frac{\omega'}{\omega_0}\right) + (2m-1)\pi\right]. \tag{11б}$$

Здесь m — то значение n, при котором начинают выполняться условия существования колебаний для двух частот. Смысл ω' ясен из рассмотрения рис. 2. Произведя соответствующие преобразования (11а) и (11б), получим

$$\tau_{кр2} = \frac{2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)}{\omega_{макс} - \omega'}. \tag{12}$$

Здесь

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\, Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_{макс}} - \frac{\omega_{макс}}{\omega_0}\right),$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\, Q\left(\frac{\omega_0}{\omega'} - \frac{\omega'}{\omega_0}\right).$$

Для оценки $\tau_{кр2}$ можно положить $\omega' = \omega_{мин}$. Если известно m, то $\tau_{кр2}$ легче всего определить из (11а). Нетрудно видеть, что при увеличении времени запаздывания число возможных колебаний быстро растет, занимая весь спектр частот, лежащий в полосе прозрачности системы.

Рассмотрим пример.

$$K_Y = R\,(10^{-3} - 10^{-5}\,Y_0^2), \quad Q = 50, \quad C = 200\ n\phi, \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 10^6 \frac{1}{сек}.$$

Отсюда определится $R = 40$ *ком*. Используя (6а), получим

$$\omega_{макс} = 2\pi \cdot 1{,}48 \cdot 10^6 \frac{1}{сек}, \qquad \omega_{мин} = 2\pi \cdot 0{,}68 \cdot 10^6 \frac{1}{сек}.$$

Полоса прозрачности $\Delta\omega_{макс} = 2\pi \cdot 0{,}8 \cdot 10^6$ 1/*сек*. Из выражения (9) для $n = 0$ и $\omega = \omega_{макс}$ находим первое критическое значение времени запаздывания $\tau_{кр1} = 0{,}173$ *мксек*.

В нашем примере $3\,\omega_{мин} > \omega_{макс}$, т. е. лежит вне полосы прозрачности системы, что является основанием для отбрасывания третьих гармоник основного колебания при получении укороченных уравнений.

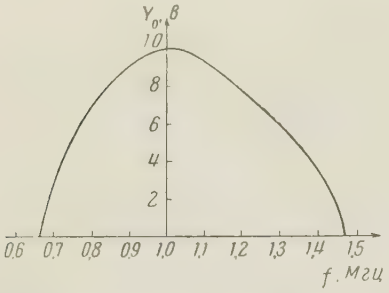


Рис. 3. Зависимость амплитуды колебаний генератора от частоты для случая $Q = 50$, $C = 200$ $n\phi$, $\omega_0 = 6{,}28 \cdot 10^6$ 1/*сек*, $K_Y = R(10^{-3} - 10^{-5} Y_0^2)$

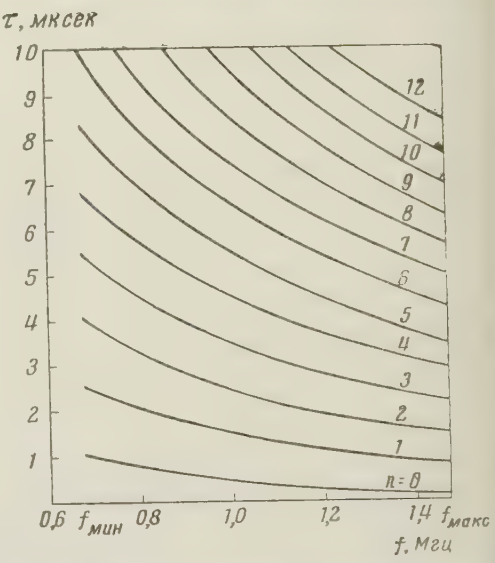


Рис. 4. Кривые значений времени запаздывания в зависимости от частоты для случая $Q = 50$, $C = 200$ $n\phi$, $\omega_0 = 6{,}28 \cdot 10^6$ 1/*сек*, $K_Y = R(10^{-3} - 10^{-5} Y_0^2)$

На рис. 3 построена зависимость амплитуды колебаний, а на рис. 4 — зависимость кривых времени запаздывания от частоты для данного примера. Из рис. 4 видно, что в данном примере чередование областей существования и отсутствия колебаний не имеет места. Это значит, что второе критическое значение времени запаздывания лежит внутри зачений τ, соответствующих первой области колебаний, и, следовательно, $m = 1$. Используя (11), для данного примера найдем $\tau_{кр2} = 0{,}85$ *мксек*.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

При $\tau \to \infty$ число возможных колебаний также растет до бесконечности, занимая весь спектр частот, лежащий в полосе прозрачности системы, а интервалы между частотами уменьшаются до нуля. При конкретном значении τ не все типы колебаний оказываются устойчивыми. В ряде работ [1, 2, 3] исследована устойчивость колебаний, когда в полосу прозрачности попадает несколько частот. В этих работах показано, что труднее все-

го удовлетворить условиям устойчивости для частот, лежащих в окрестности границ полосы прозрачности, и легче всего — для частот, лежащих вблизи резонансной частоты.

В литературе нет работ, посвященных общему исследованию поведения автоколебательных систем с запаздыванием при изменении времени запаздывания в достаточно широких пределах.

Методы исследования устойчивости, использованные в [1—3], не дают ответ на вопрос об устойчивости колебаний, лежащих вблизи резонансной частоты, и потому не могут быть в данном случае использованы.

Следует подчеркнуть, что метод исследования устойчивости, использованный в настоящем параграфе, принципиально не может дать ответа на вопрос о возможности возникновения других типов колебаний, асинхронных по отношению к основному типу, обусловленных цепью запаздывания, или колебаний синхронных, обусловленных типом нелинейности.

Положим

$$\begin{gathered} Y = Y_0 + \xi, \\ \psi = \psi_0 + \varphi = \omega t + \varphi(t). \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь ξ, φ — малые отклонения от стационарных значений, медленно меняющиеся во времени. Начальные условия можно задать на участке — $\tau \leqslant t \leqslant 0$ в виде $\xi_\tau = \xi_0$, $\varphi_\tau = \varphi_0$. Полагаем также, что при $t \leqslant 0$ $\xi = \varphi = 0$.

Подставив (13) в (3), используем условия (6); после отбрасывания членов высшего порядка малости получим систему двух линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{gathered} -\dot{\xi} T_к = \xi + K_\xi \cos \omega\tau \xi_\tau - K_Y Y_0 \sin \omega\tau (\varphi - \varphi_\tau), \\ \dot{\varphi} T_к = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega Y_0} \xi + \frac{1}{Y_0} K_\xi \sin \omega\tau \xi_\tau + K_Y \cos \omega\tau (\varphi - \varphi_\tau). \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь $T_к = 1/\delta$.

Переходя к операторному изображению и интересуясь только устойчивостью, используя условия стационарности (5), получим

$$\begin{gathered} -PT_к \xi(P) = (1 - \gamma e^{-P\tau}) \xi(P) + Y_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} (1 - e^{-P\tau}) \varphi(P), \\ PT_к \varphi(P) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega Y_0} (1 - \gamma e^{-P\tau}) \xi(P) - (1 - e^{-P\tau}) \varphi(P). \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $\gamma = K_\xi / K_Y$.

Устойчивость амплитуды, как обычно, проверяется по знаку действительной части корней детерминанта

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 - \gamma e^{-\lambda\tau/T_к} & Y_0 \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} (1 - e^{-\lambda\tau/T_к}) \\ \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega Y_0} (1 - \gamma e^{-\lambda\tau/T_к}) & -(\lambda + 1 - e^{-\lambda\tau/T_к}) \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Здесь введено обозначение $\lambda = PT_к$.

После очевидных преобразований (16) примет вид

$$D(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + K_Y^2 - (1 + \gamma)(\lambda + K_Y^2) e^{-\lambda\tau/T_к} + \gamma K_Y^2 e^{-2\lambda\tau/T_к} = 0. \tag{17}$$

Полагая $\lambda = j\beta$, из (17) получим уравнение $D(j\beta) = 0$, определяющее изображение мнимой оси на комплексной плоскости D. При изменении β реальная и мнимая части $D(j\beta)$ изменяются. В случае, если $\pm j\beta$ будут являться корнями (17), то $D(j\beta) = 0$.

Устойчивость уравнения (17) зависит от параметров K_Y, $T_к$, γ и τ. В случае если при изменении параметра τ от нуля и выше появится пара мнимых корней, то система окажется на границе устойчивости. При дальнейшем изменении τ она будет уже неустойчивой (при условии, что при $\tau = 0$ она была устойчивой). Полагая в (17) $\tau = 0$ и воспользовавшись критерием Гурвица, можно показать, что колебания при $\tau = 0$ будут устойчивыми (подразумевается, что фазовые соотношения, необходимые для генерации исследуемой частоты, сохраняются).

Появление мнимых корней возможно только при одновременном выполнении условий

$$\operatorname{Re} D(j\beta) = 0, \qquad \operatorname{Im} D(j\beta) = 0. \tag{18}$$

Уравнения (18) можно привести к виду

$$\frac{\sqrt{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}}{\frac{1}{2(1+\gamma)}\alpha^2 + \frac{2+(1+\gamma)^2}{2(1+\gamma)}\alpha + 1} \cos\left[\sqrt{\alpha}\,\frac{\tau}{T_к} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\alpha}\right] = 1. \tag{19}$$

Здесь $\alpha = \beta^2/K_Y^2$.

Уравнение (19) позволяет исследовать появление мнимых корней при изменении параметра τ. Однако если менять τ непрерывно, то в выражении, стоящем перед косинусом, которое мы в дальнейшем обозначим через $(W\alpha)$, будут изменяться коэффициенты. Чтобы избежать этого, будем изменять τ дискретно на величину $\Delta\tau = 2\pi/\omega$. При таком дискретном изменении τ значения коэффициентов в выражении для $W(\alpha)$ будут оставаться постоянными. Если существует область $|W(\alpha)| > 1$, то, меняя τ, можно добиться выполнения равенства (19), что будет соответствовать появлению пары чисто мнимых корней.

Однако областей $|W(\alpha)| > 1$ может и не быть, и тогда уравнения первого приближения оказываются недостаточными для определения устойчивости. Так, например, $|W(\alpha)| < 1$ для всех α в случае если $-1 < \gamma < 0$. Тогда если $\tau > T_к$, то в малом амплитуда колебаний будет устойчивой, в большом же — неустойчивой. Обычно при нашей аппроксимации нелинейности $\gamma < -1$.

Из (19) можно определить такое значение времени запаздывания — третье критическое $\tau_{крз}$, что при выполнении неравенства $\tau > \tau_{крз}$ устойчивые по амплитуде стационарные колебания на любой частоте, в том числе и на $\omega = \omega_0$, будут невозможными.

Для нахождения $\tau_{крз}$ вначале из условия $|W(\alpha_{макс})| = 1$ находится $\alpha_{макс}$. Чтобы равенство (19) в этом случае имело место, необходимо выполнение дополнительного условия, а именно: если $W(\alpha_{макс}) = 1$, то

$$\tau = \frac{T_к}{\sqrt{\alpha_{макс}}}(2\pi n - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\alpha_{макс}}), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Если же $W(\alpha_{макс}) = -1$, то

$$\tau = \frac{T_к}{\sqrt{\alpha_{макс}}}[(2n-1)\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\alpha_{макс}}], \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Значение $\tau_{крз}$ определится соответственно из уравнений (20) или (21), если положить в них $n = 1$. В наших вычислениях значение корня в выражении для $W(\alpha)$ берется положительным.

На рис. 5 построены зависимости, поясняющие вышесказанное.

В случае если $\omega = \omega_0$, из (16) будем иметь

$$(\lambda + 1 - K_\xi e^{-\lambda\tau/T_к})[\lambda + 1 - e^{-\lambda\tau/T_к}] = 0. \tag{22}$$

Выражение в квадратных скобках ни при каких значениях λ, за исключением $\lambda = 0$, не может равняться нулю. Следовательно,

$$D(\lambda) = \lambda + 1 - K_\xi e^{-\lambda\tau/T_к} = 0. \tag{23}$$

Выражение (23) может иметь корни с положительной действительной частью только в случае $|K_\xi| > 1$.

Подставляя в (23) $\lambda = j\beta$ и приравнивая действительные и мнимые части полученного выражения нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} 1 - K_\xi \cos \beta\tau/T_к &= 0, \\ \beta + K_\xi \sin \beta\tau/T_к &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Эти же выражения можно записать иначе:

$$W(Y_0, \xi, \beta) = \frac{|K_\xi|}{\sqrt{\beta^2 + 1}} = 1, \tag{25а}$$

$$\tau = \frac{T_к}{\beta}[2\pi n - \operatorname{arc\,tg}\beta] \quad \text{для} \quad K_\xi > 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{25б}$$

$$\tau = \frac{T_к}{\beta}[(2n-1)\pi - \operatorname{arc\,tg}\beta] \quad \text{для} \quad K_\xi < -1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{25в}$$

В нашем обозначении β представляет собой безразмерную частоту. Для перехода к размерной частоте следует воспользоваться выражением $\Omega = \beta/T_к$; $W(Y_0, \xi, \beta)$ представляет собой коэффициент передачи возмущения по огибающей для замкнутой петли обратной связи генератора.

Пример.

$K_Y = R(10^{-3} - 10^{-5} Y_0^2)$,

$K_\xi = R(10^{-3} - 3 \cdot 10^{-5} Y_0^2)$,

$\omega = \omega_0$, $R = 2{,}5$ *ком*,

$T_к = 50$ *мксек*.

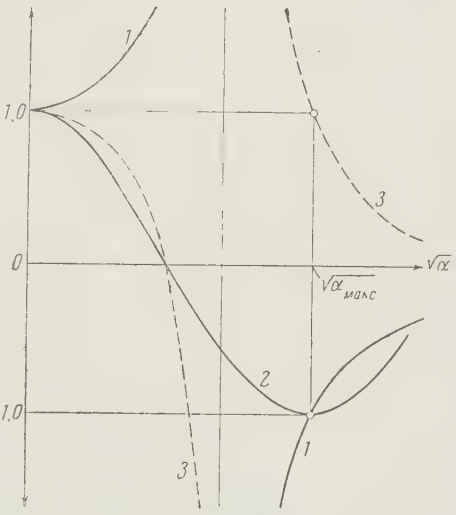


Рис. 5. Кривые для определения устойчивости стационарных колебаний:

1 — $W(\alpha)$; 2 — $\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}\tau}{T_к} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\alpha}\right)$;

3 — $W(\alpha)\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}\tau}{T_к} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\alpha}\right)$

Воспользуя условия стационарности (6), найдем, что $K_\xi = -2$. Тогда безразмерная частота $\beta = 1{,}73$, откуда $\Omega = 3{,}46 \cdot 10^3$ 1/*сек*. Из (25в) для $n = 1$ найдем $\tau_{крз} = 61$ *мксек*.

Таким образом, нами показано, что в автогенераторе при $\tau > \tau_{крз}$ принципиально невозможно существование устойчивых стационарных колебаний, так как даже в случае $-1 < \gamma < 0$ при большом запаздывании всегда найдется достаточно сильное возмущение, выводящее в область значений $|\gamma| > 1$.

При значениях $\tau \simeq \tau_{кр3}$ запаздывание становится настолько большим, что создает заметный фазовый сдвиг по огибающей высокочастотных колебаний; дополнительный фазовый сдвиг по огибающей вносит контур; кроме того, вид нелинейности также может влиять на фазу огибающей. В случае, если суммарный набег по фазе огибающей будет равен 2π, то возникают условия для самомодуляции колебаний.

При τ, незначительно бо́льших $\tau_{кр3}$, возникает синусоидальная самомодуляция с незначительной глубиной. Период модуляции не кратен времени запаздывания из-за значительного влияния на фазу огибающей контура. Самомодуляция сопровождается фазовой модуляцией несущей.

При дальнейшем увеличении τ глубина модуляции увеличивается, форма огибающей искажается. Период модуляции становится кратным τ. Можно ожидать, что при еще бо́льших временах запаздывания в отдельные моменты амплитуда высокочастотных колебаний может упасть до нуля. Следовательно, могут возникнуть отдельные импульсы высокочастотных колебаний. Так как в системе постоянно действуют малые случайные возмущения, то положение фронтов импульсов будет все время меняться, длительность импульсов будет случайной и их вершины будут иметь случайные горбы и впадины. Всякая периодичность в следовании отдельных всплесков пропадает. Колебания, разделенные интервалом τ, окажутся некоррелированными не только по высокочастотной составляющей, но и по огибающей. Генератор с запаздыванием при больших временах запаздывания превращается таким образом в генератор шумов, генерирующий весь спектр частот, лежащий в полосе прозрачности системы.

В [4] приведено описание эксперимента, который в некоторой степени подтверждает последнее предположение.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Гоноровский, К теории высокочастотных автогенераторов с запаздывающей обратной связью, Радиотехника, 1958, 13, 5, 19.
2. V. Met, On multimode oscillators with constant time delay, Proc. I. R. E., 1957, 45, 8, 1119.
3. W. A. Edson, Frequency memory in multimode oscillators, IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, 1, 58.
4. O. E. Lange, Experiments on the regeneration of binary microwave pulses, Bell System Techn. J., 1956, 35, 1, 67.

Поступила в редакцию
1 VI 1960
После переработки
7 II 1961

СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОГЕНЕРАТОРА СЛАБОМОДУЛИРОВАННОЙ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ

В. П. Яковлев

Рассмотрена синхронизация автогенератора внешней эдс, модулированной по амплитуде и частоте, в предположении, что разность фаз между колебаниями автогенератора и внешней эдс, а также амплитуда автогенератора близки к соответствующим величинам при немодулированной эдс. Для амплитудно-модулированной, частотно-модулированной и бигармонической внешних сил экспериментально исследована зависимость коэффициентов глубины модуляции колебаний автогенератора от частоты модуляции эдс и от расстройки между ее основной частотой и частотой автоколебаний. Полученные результаты качественно согласуются с теоретическим расчетом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Воздействие немонохроматической внешней эдс на автогенератор в режиме самовозбуждения рассмотрено в ряде статей. В работах [1—4] исследована синхронизация автогенератора последовательностью радиоимпульсов и рассмотрены процессы установления амплитуды и фазы его колебаний. В работах [5, 6] учитывается наличие флуктуационных помех. Влияние модуляции эдс на синхронизацию автогенератора рассмотрено в работах [7—11]. В частности, в [11] исследована синхронизация посредством внешней эдс, модулированной по амплитуде и частоте. Вычислена полоса синхронизации и получено выражение для фазы колебаний автогенератора в предположении, что разность фаз между этими колебаниями и внешней эдс мала.

В данной работе исследуется поведение автогенератора при действии внешней эдс, модулированной по амплитуде и частоте с достаточно малыми коэффициентами глубины модуляции. Это условие не означает, что сама разность фаз между колебаниями автогенератора и внешней эдс мала, но она близка к значению, устанавливающемуся при действии немодулированной эдс. Амплитуда колебаний автогенератора тоже мало отличается от своего установившегося значения.

Пусть подводимая к сетке лампы автогенератора внешняя эдс равна

$$E(t) = E_0 (1 + m_1 \cos \Omega_1 t) \cos [\omega t + \varphi (\Omega_2 t)], \tag{1}$$

где

$$\frac{d\varphi}{dt} = m_2' \omega \sin \Omega_2 t; \tag{2}$$

m_1, m_2' — коэффициенты глубины амплитудной и частотной модуляций эдс соответственно.

Аппроксимируем зависимость анодного тока от напряжения v на сетке полиномом третьей степени:

$$I_a (v) = Sv - \gamma' v^3. \tag{3}$$

Тогда уравнение для безразмерного напряжения x на сетке можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt'^2} + x = 2\mu \left[x + \xi x - 4x^2 \frac{dx}{dt'} + A_0 (1 + m_1 \cos \gamma_1 \tau) \cos \{t' + \varphi (\gamma_2 \tau)\} \right].$$

где A_0 — безразмерная амплитуда внешней эдс; μ — малый параметр (инкремент генератора); ξ — безразмерная расстройка, определяемая соотношением

$$2\mu\xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \simeq \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega}; \tag{5}$$

ω_0 — частота автоколебаний; $t' = \omega t$ — безразмерное время; $\tau = \mu t'$ — так называемое «медленное время»; величины γ_1 и γ_2 определяются выражениями

$$\mu\gamma_1 = \frac{\Omega_1}{\omega}; \qquad \mu\gamma_2 = \frac{\Omega_2}{\omega}. \tag{6}$$

Учитывая, что добротность контура велика ($\mu \ll 1$), можно искать решение методом медленно меняющихся амплитуды ρ и фазы Θ, полагая $x = \rho(\tau)\cos[t' + \Theta(\tau)]$. Обычная процедура приводит тогда к следующим уравнениям ван-дер-Поля для амплитуды ρ и разности α между фазой автогенератора Θ и фазой эдс φ:

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho(1 - \rho^2) - A_0(1 + m_1\cos\gamma_1\tau)\sin\alpha, \\ \rho\alpha' &= -\xi\rho - A_0(1 + m_1\cos\gamma_1\tau)\cos\alpha - \rho m_2\sin\gamma_2\tau, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$m_2 = \frac{m_2'}{\mu}. \tag{8}$$

Точное решение уравнений (7) в общем случае не может быть получено, а их качественное исследование невозможно из-за явной зависимости от τ. Мы ограничимся поэтому решением линеаризованных уравнений, взяв в качестве нулевого приближения установившееся решение в отсутствие модуляции ($m_1 = m_2' = 0$), т. е. решение уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0' &= \rho_0(1 - \rho_0^2) - A_0\sin\alpha_0 = 0, \\ \rho_0\alpha_0' &= -\xi\rho_0 - A_0\cos\alpha_0 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Естественно ожидать, что при малых m_1 и m_2 решение уравнений (7) будет близким к решению уравнений (9). Более того, даже если m_1 и m_2 нельзя считать малыми, но частоты γ_1 и γ_2 достаточно велики, то амплитуда и фаза колебаний автогенератора не успеют следовать за изменениями амплитуды и фазы внешней силы и, следовательно, решение уравнений (7) должно и в этом случае мало отличаться от ρ_0 и α_0. Можно, таким образом, рассчитывать на то, что решение уравнений (7), имеющее вид

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1, \tag{10}$$

где ρ_1 и α_1 малы ($\rho_1 \ll \rho_0$, $\alpha_1 \ll \pi/2$), будет пригодно в обоих названных случаях.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Первоначально мы будем исходить из предположения о малости m_1 и m_2. Подставляя (10) в (7) и ограничиваясь членами, линейными относительно ρ_1, α_1, m_1, m_2, получим следующие уравнения для ρ_1 и α_1:

$$\begin{aligned} \rho_1' + (3\rho_0^2 - 1)\rho_1 - \xi\rho_0\alpha_1 &= -\rho_0(1 - \rho_0^2)m_1\cos\gamma_1\tau, \\ \alpha_1' + \frac{\xi}{\rho_0}\rho_1 + (\rho_0^2 - 1)\alpha_1 &= \xi m_1\cos\gamma_1\tau - m_2\sin\gamma_2\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

Решая эти уравнения, находим выражения для амплитуды ρ и частоты $\omega(t)$ автогенератора:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0[1 + M_{11}\cos(\Omega_1 t + \psi_1) - M_{12}\cos(\Omega_2 t + \psi_2)], \\ \omega(t) &= \frac{d}{dt}[\omega t + \Theta(t)] = \omega[1 + M_{21}\sin(\Omega_1 t + r_1) + M_{22}\sin(\Omega_2 t + r_2)], \\ M_{11} &= m_1 R_1; \quad M_{12} = m_2 R_2; \quad M_{21} = \mu m_1 Q_1; \quad M_{22} = m_2' Q_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Выражения для R_1, R_2, Q_1, Q_2 довольно громоздки, и мы их приводить не будем. Величины R_1, R_2, Q_1, Q_2 зависят от амплитуды ρ_0, расстройки ξ и частот модуляции γ_1 и γ_2. Для иллюстрации этой зависимости выберем $A_0^2 = 0{,}1$, что соответствует случаю малой внешней силы ($A_0^2 < {}^8/_{27}$) [12].

На рис. 1 приведена зависимость ρ_0^2 от ξ (сплошная кривая). Полуширина полосы синхронизации при $A_0^2 = 0{,}1$ соответствует $\xi = 0{,}32$ *.

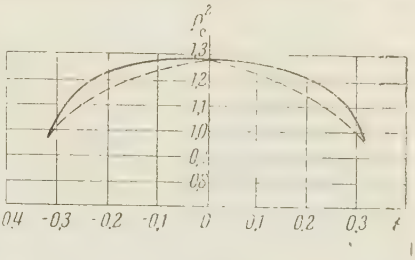


Рис. 1. Зависимость амплитуды автоколебаний от расстройки

На рис. 2—5 сплошными линиями показаны кривые $R_1(\gamma_1)$, $R_2(\gamma_2)$, $Q_1(\gamma_1)$ и $Q_2(\gamma_2)$ при нескольких значениях расстройки ξ в зависимости от $\lg \gamma^2$, причем, как и ранее, принято $A_0^2 = 0{,}1$.

При малых расстройках ξ можно из (11) получить простые приближенные формулы для величин Q_1 и Q_2, входящих в (12). Если считать, как это делается в (11), расстройку ξ и изменение амплитуды ρ_1 настолько малыми, что во втором уравнении (11) величиной $\xi\rho_1$ можно пренебречь, то для определения фазы получаем уравнение

$$\alpha_1' + (\rho_0^2 - 1)\,\alpha_1 = \xi m_1 \cos \gamma_1 \tau - m_2 \sin \gamma_2 \tau, \qquad (13)$$

решение которого дает

$$Q_1 = \frac{\xi\gamma_1}{\sqrt{(\rho_0^2-1)^2 + \gamma_1^2}}, \qquad Q_2 = \frac{\rho_0^2 - 1}{\sqrt{(\rho_0^2-1)^2 + \gamma_2^2}}. \qquad (14)$$

Как показывает сравнение (12) и (14), ошибка при вычислении Q_1 и Q_2 по формулам (14) при $\xi < 0{,}22$ не превышает 10—15%.

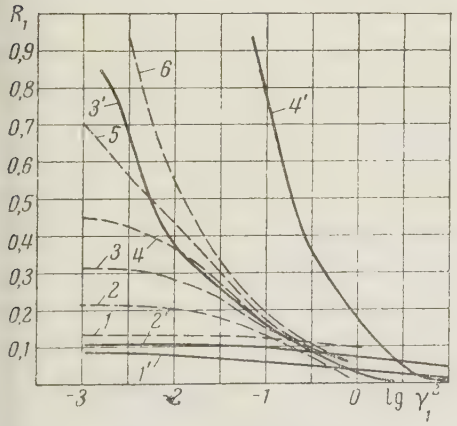


Рис. 2. Амплитудная модуляция колебаний автогенератора при амплитудной модуляции внешней эдс:

1 — $\xi = 0$; 2 — $\xi = 0{,}2$; 3′ — $\xi = 0{,}28$; 4 — $\xi = 0{,}29$; 5 — $\xi = 0{,}3$; 6 — $\xi = 0{,}315$; 1′ — $\xi = 0$; 2′ — $\xi = 0{,}22$; 3′ — $\xi = 0{,}31$; 4′ — $\xi = 0{,}32$

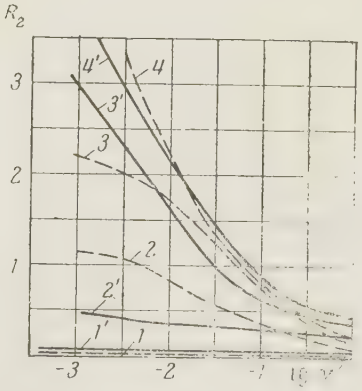


Рис. 3. Амплитудная модуляция колебаний автогенератора при частотной модуляции внешней эдс:

1 — $\xi = 0$; 2 — $\xi = 0{,}2$; 3 — $\xi = 0{,}29$; 4 — $\xi = 0{,}315$; 1′ — $\xi = 0{,}1$; 2′ — $\xi = 0{,}22$; 3′ — $\xi = 0{,}31$; 4′ — $\xi = 0{,}32$

* Здесь и далее под интервалом синхронизации подразумевается интервал, получающийся при воздействии немодулированной внешней эдс.

При еще меньших расстройках ξ находим из (9), что $\cos\alpha_0 \simeq 0$ и $\rho_0^2 - 1 \simeq A_0/\rho_0$. Подставляя это значение $\rho_0^2 - 1$ в (14), получаем для Q_1 и Q_2 выражения, аналогичные формулам (14) и (21) в статье [11]:

$$Q_1 = \frac{\xi\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \frac{A_0^2}{\rho_0^2}}}, \qquad Q_2 = \frac{A_0}{\rho_0}\frac{1}{\sqrt{\gamma_2^2 + \frac{A_0^2}{\rho_0^2}}}. \tag{15}$$

Из сравнения (15) с (14) следует, что формулами (15) можно пользоваться лишь при $\xi < 0{,}1$.

Согласно (12) величины R_1, Q_1 характеризуют модуляцию колебаний автогенератора при синхронизации амплитудно-модулированной внешней силой ($m_2 = 0$). Величины R_2 и Q_2 описывают модуляцию колебаний автогенератора при частотной модуляции эдс ($m_1 = 0$). В случае, когда синхронизирующая эдс является бигармонической, т. е.

$$E(t) = E_0 [\cos \omega t + m \cos(\omega + \Omega) t], \tag{16}$$

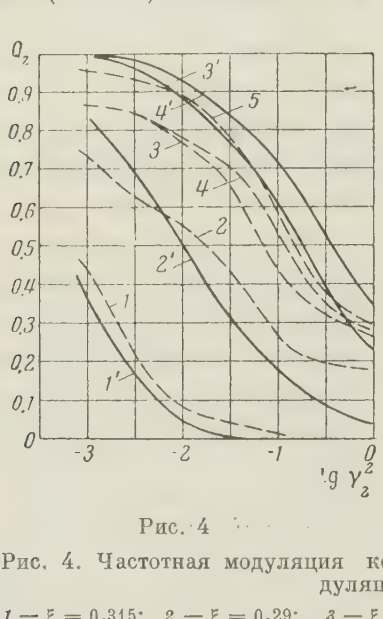


Рис. 4

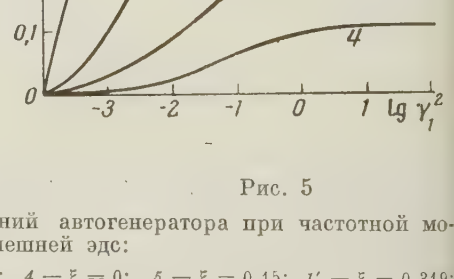


Рис. 5

Рис. 4. Частотная модуляция колебаний автогенератора при частотной модуляции внешней эдс:

1 — $\xi = 0{,}315$; *2* — $\xi = 0{,}29$; *3* — $\xi = 0{,}2$; *4* — $\xi = 0$; *5* — $\xi = 0{,}15$; *1′* — $\xi = 0{,}319$; *2′* — $\xi = 0{,}31$; *3′* — $\xi = 0{,}22$; *4′* — $\xi = 0$; *5′* — $\xi = 0{,}1$

Рис. 5. Частотная модуляция колебаний автогенератора при амплитудной модуляции внешней эдс:

1 — $\xi = 0{,}319$; *2* — $\xi = 0{,}31$; *3* — $\xi = 0{,}218$; *4* — $\xi = 0{,}1$

где $m \ll 1$, выражения для ρ и $\omega(t)$ также можно записать в виде

$$\rho = \rho_0 [1 + M_1 \cos(\Omega t + \beta_1)],$$
$$\omega(t) = \omega [1 + M_2 \cos(\Omega t + \beta_2)], \tag{17}$$
$$M_1 = P_1 m_1, \qquad M_2 = \mu m P_2,$$

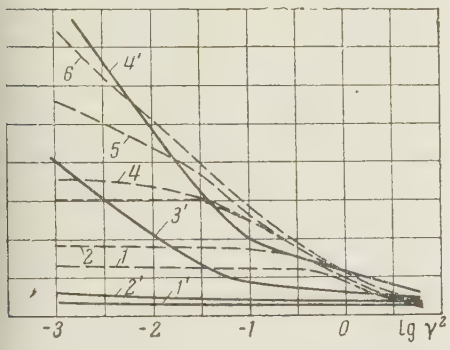
причем величины P_1 и P_2 получаются из R_1, R_2, Q_1, Q_2 при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, а γ дается выражением $\mu\gamma = \Omega/\omega$.

На рис. 6, 7 сплошными линиями показаны кривые $P_1(\gamma)$, $P_2(\gamma)$ при нескольких значениях ξ и $A_0^2 = 0{,}1$.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Для выяснения степени пригодности идеализации, принятой в теоретическом расчете, экспериментально была исследована синхронизация автогенератора амплитудно-модулированной, частотно-модулированной и бигармонической эдс с малыми глубинами модуляции. При исследовании

именялась установка, основные элементы которой показаны на рис. 8. новная частота ω внешней силы подбиралась так, чтобы расстройка меж- ω и частотой ω_0 колебаний автогенератора лежала внутри интервала нхронизации. Изменение $\omega - \omega_0$ осуществлялось путем перестройки кон-



ис. 6. Амплитудная модуляция колеаний автогенератора при воздействии бигармонической эдс:

– ξ = 0; 2 — ξ = 0,15; 3 — ξ = 0,25; 4 — = 0,28; 5 — ξ = 0,3; 6 — ξ = 0,315; 1′ — = 0; 2′ — ξ = 0,22; 3′ — ξ = 0,31; 4′ — ξ = 0,32

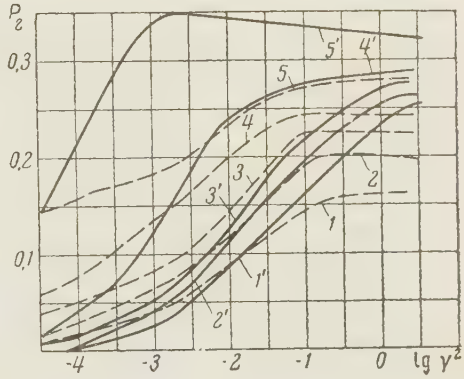


Рис. 7. Частотная модуляция колебаний автогенератора при воздействии бигармонической эдс:

1 — ξ = 0; 2 — ξ = 0,2; 3 — ξ = 0,28; 4 — ξ = 0,3; 5 — ξ = 0,315; 1′ — ξ = 0; 2′ — ξ = 0,1; 3′ — ξ = 0,22; 4′ — ξ = 0,31; 5′ — ξ = 0,319

ра автогенератора. В процессе каждого измерения расстройка $\omega - \omega_0$ охраняла неизменное значение. Глубины частотной и амплитудной модуяций автогенератора измерялись при помощи амплитудного и частотного етекторов, выходного усилителя низкой частоты и вольтметра.

При всех трех видах модуляции внешней силы изучалась амплитудная частотная модуляции колебаний автогенератора в зависимости от чатоты модуляции внешней силы и ри нескольких значениях расстройки $\omega - \omega_0$. Амплитуда синхронизирующей эдс подбиралась ак, чтобы величина A_0^2 имела начение 0,1.

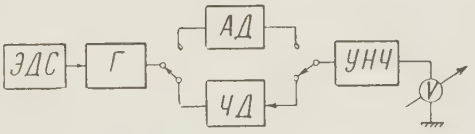


Рис. 8. Блок-схема экспериментальной установки:

ЭДС — источник внешней синхронизирующей силы; *Г* — исследуемый автогенератор; *АД* — амплитудный детектор; *ЧД* — частотный детектор; *УНЧ* — выходной усилитель низкой частоты; *V* — вольтметр

Для возможности непосредственного сопоставления экспериментальных данных с теоретическими результатами целесообразно ыбрать такую схему автогенератора, чтобы дифференциальное равнение для напряжения на етке совпадало с уравнением (4). Этому требованию удовлетворяет хема, изображенная на рис. 9. Генератор с контуром в цепи анода собран а лампе 6Ж3П. На анод и экранирующую сетку лампы подавалось стализированное постоянное напряжение +105 *в*. Напряжение обратной вязи подводилось к сетке g_1 с анода лампы 6П1П. На этой сетке при поощи сопротивлений R_1 и R_2 и вольтметра V поддерживался нулевой отенциал относительно катода. Собственная частота автогенератора ежала в диапазоне 900 *кгц*. Измеренная добротность контура равняась 100.

В качестве источника амплитудно-модулированных сигналов применялся генератор стандартных сигналов ГСС-6, а для создания бигармонических

кой эдс — два таких прибора. Источник частотно-модулированных сигналов представлял собой генератор по схеме Колпица, в контур которого были введены в качестве переменной емкости два полупроводниковых диода.

Естественно было исследовать первоначально синхронизацию автогенератора немодулированной эдс.

Измеренная величина расстройки $\omega - \omega_0$, соответствующая границе синхронного режима, составила 6 *кгц*. Подставляя это значение $\omega - \omega_0$ в (5) и полагая $\xi = 0{,}32$, можно определить величину μ, которая оказывается равной 0,02. На рис 1 вместе с теоретической кривой $\rho_0(\xi)$ изображена пунктиром экспериментальная зависимость амплитуды автогенератора ρ_0 от расстройки ξ.

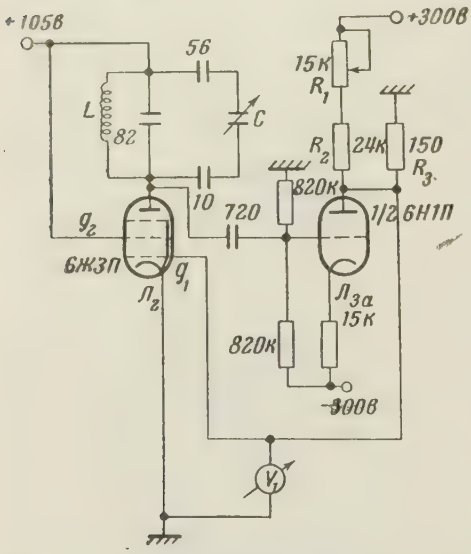


Рис. 9. Принципиальная схема автогенератора

В качестве источника модулирующего напряжения при применении амплитудной и частотной модуляций был использован анализатор спектра и частотных характеристик АСЧХ-1; с его выхода снимается напряжение, частота которого, автоматически меняющаяся от 0 до 20 *кгц*, измерялась частотомером. Это дает возможность получить на выходе источников обоих видов модуляции слабомодулированные колебания с изменяющейся частотой модуляции, синхронизирующие исследуемый автогенератор. Продетектированные и усиленные колебания низкой частоты измерялись вольтметром V и подводились к входу АСЧХ-1. Таким образом, на экране этого прибора можно было наблюдать зависимость коэффициентов глубины модуляции колебаний автогенератора от частоты модуляции. Частотомер и вольтметр давали возможность фиксировать эту зависимость количественно.

Использование прибора АСЧХ-1 позволило избежать ошибок при измерении глубин модуляции автогенератора, обусловленных медленными изменениями расстройки в процессе измерений вследствие нестабильности источников эдс.

Для устранения этих ошибок была использована медленность изменения расстройки: частота модуляции изменялась от нулевой до максимальной настолько быстро, что за это время расстройка практически не менялась.

Коэффициент m_2' глубины частотной модуляции был выбран равным $3 \cdot 10^{-4}$, что обеспечивает достаточную малость m_2. Коэффициент глубины амплитудной модуляции равнялся 0,02.

На рис. 2—4, наряду с теоретическими кривыми, показаны пунктиром результаты измерения величин R_1, R_2, Q_2.

При измерении частотной модуляции колебаний автогенератора, синхронизированного амплитудно-модулированными сигналами, оказалось, что она сравнима с паразитной частотной модуляцией, присутствующей в источнике. Это обстоятельство не позволило выполнить непосредственное измерение коэффициента M_{21} при работе с данным источником. Все же оказалось возможным оценить верхнюю границу M_{21} и установить, что $M_{21} < \mu m_1$.

В случае бигармонической эдс величина m, определяемая выражением (17), выбиралась равной 0,04. Разностная частота измерялась при помощи частотомера, включенного на выходе амплитудно-модулированного детектора. На рис. 6, 7 пунктиром изображены результаты измерений величин P_1 и P_2.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Сравнение экспериментальных результатов с теоретическими, которое можно провести, пользуясь графиками, изображенными на рис. 1—6, показывает их качественное согласие. Количественные расхождения, которые видны на всех графиках, вызваны, по-видимому, неточностью кубической аппроксимации зависимости анодного тока от напряжения на сетке. Эти расхождения особенно сильны для амплитудной модуляции колебаний автогенератора при небольших расстройках, т. е. при $\xi \simeq 0$. Как видно из графиков рис. 2, 3 и 6, экспериментально измеренная глубина модуляции в 2—3 раза превосходит в этом случае теоретически рассчитанную.

При синхронизации автогенератора частотно-модулированной эдс коэффициент глубины частотной модуляции колебаний автогенератора M_{22} близок при небольших расстройках ξ и небольших частотах модуляции к коэффициенту глубины модуляции эдс (рис. 4). С увеличением ξ частотная модуляция уменьшается. При увеличении частоты модуляции коэффициент M_{22} монотонно убывает. Амплитудная модуляция невелика при $\xi \simeq 0$ и сильно возрастает для небольших частот модуляции, когда ξ приближается к границе интервала синхронизации (рис. 3). Если частота модуляции возрастает, амплитудная модуляция уменьшается и при $\gamma \geqslant 1$ практически отсутствует.

Если на автогенератор воздействует амплитудно-модулированная эдс, то, как видно из рис. 2, амплитудная модуляция колебаний автогенератора невелика для небольших расстроек ξ. При подходе ξ к границе интервала синхронизации и при небольших частотах модуляции коэффициент глубины амплитудной модуляции сильно возрастает. При увеличении частоты модуляции амплитудная модуляция уменьшается и при $\gamma \geqslant 1$ оказывается практически несущественной. Частотная модуляция весьма мала при любых ξ и Ω.

Синхронизация бигармонической эдс (рис. 6 и 7) сопровождается амплитудной модуляцией, которая сравнительно невелика при $\xi \simeq 0$ и сильно возрастает при небольших частотах модуляции и при стремлении ξ к границе интервала синхронизации. Частотная модуляция незначительна и, в отличие от амплитудной, возрастает при увеличении частоты модуляции.

Сравним в заключение влияние амплитудной и частотной модуляций эдс на модуляцию колебаний автогенератора. Рис. 4 и 5 показывают, что величина Q_1 не превосходит единицы, а Q_2 при небольших ξ близка к единице. Поэтому, как следует из (12), при $m_1 \simeq m'_2$ частотная модуляция эдс приводит к значительно большей модуляции частоты автогенератора, чем столь же глубокая амплитудная модуляция эдс. Аналогичный вывод можно сделать, сравнивая влияние обоих видов модуляции эдс на амплитудную модуляцию колебаний автогенератора: при сравнимых глубинах модуляции эдс ($m_1 \simeq m'_2$) ее частотная модуляция влияет на автогенератор значительно сильнее.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность С. М. Рытову и Ф. А. Водопьянову за помощь при выполнении работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Н. Занадворов, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 2, 202.
2. Э. С. Воронин, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 1, 79.
3. Э. С. Воронин, Г. И. Берестовский, Радиотехника, 1956, **11**, 3, 34.
4. Э. С. Воронин, В. И. Рогатнев, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 2, 144.
5. С. Я. Раевский, Р. В. Хохлов. Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 4, 567.
6. Ю. Ф. Коробов, Тр. ЛЭИС, 1959, вып. VII (44), 59.
7. Д. П. Мартыненко, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 8, 1001.
8. И. М. Соболь, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 10, 1739.
9. А. И. Шустеровнч, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 4, 568.
10. Ю. И. Самойленко, Радиотехника, 1960, **15**, 7, 37.
11. Э. С. Воронин, Радиотехника, 1959, **14**, 2, 48.
12. А. А. Андронов, Собр. трудов, Изд. АН СССР, 1956.

Поступила в редакцию
2 I 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 10

ОБ АВТОГЕНЕРАТОРЕ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННОМ С ЛИНЕЙНЫМ КОНТУРОМ

Ю. В. Григорьев, Р. В. Хохлов

Статья посвящена изучению параметрического возбуждения колебаний в линейной системе с учетом обратной реакции возбуждаемых колебаний на аппарат, осуществляющий изменение энергоемкого параметра. Рассмотрение проблемы сводится к исследованию автоколебательной системы с двумя параметрически связанными степенями свободы. Изучены стационарные колебания в такой системе и проанализирована их устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, при параметрическом резонансе наличие затухания не ограничивает рост амплитуды возбуждаемых в линейной системе колебаний [1]. Если систему вплоть до достаточно больших амплитуд можно считать линейной, то причиной, ограничивающей рост амплитуды, является обратная реакция системы на генератор, осуществляющий изменение энергоемкого параметра. Очевидно, что такая реакция становится заметной, когда мощность колебаний в системе оказывается равной по порядку мощности генератора.

В случае обычного резонанса задача учета обратной реакции на генератор сводится к исследованию автогенератора, связанного с контуром как единой автоколебательной системой с двумя степенями свободы. Это исследование показывает [2, 3, 4], что при связях, много меньших некоторой критической связи, мощность, рассеиваемая в резонансном контуре, значительно меньше мощности генератора, и ограничение амплитуды колебаний в контуре определяется наличием в нем затухания. Если же связь становится порядка критической, мощность колебаний в резонансном контуре оказывается равной по порядку мощности генератора, и обратная реакция приводит к заметному изменению амплитуды и частоты генератора. Эти изменения и являются причиной ограничения роста амплитуды в резонансном контуре.

Соответствующая задача для параметрического резонанса приводит к исследованию автогенератора, параметрически связанного с линейным контуром.

Наиболее простым примером параметрической связи между системами является связь между вертикальными колебаниями пружинного маятника и его угловыми колебаниями, когда частота вертикальных колебаний вдвое больше частоты угловых колебаний [5]. Если линейные системы связаны параметрически, то, подобно случаю непосредственной связи между ними, воздействие колебаний в одной парциальной системе на колебания в другой приводит к периодической перекачке энергии из одной системы в другую. Рост амплитуд в каждой из систем ограничивается общим запасом энергии в системах.

А. Н. Чарахчьян [6] рассмотрел параметрическое возбуждение колебаний, при котором внешняя эдс заданных амплитуды и частоты подавалась на резонансный усилитель, параметрически связанный с линейным контуром. В этом случае обратная реакция возбуждаемых колебаний на

усилитель приводит к ограничению роста амплитуды в контуре. Частота колебаний остается неизменной ввиду того, что усилитель является развязкой между контуром и генератором.

Реакция колебаний в параметрических усилителях на генератор, производящий изменение параметра, проанализирована в [7].

Настоящая работа посвящена анализу обратной реакции параметрически возбуждаемого контура на генератор, когда изменение параметра осуществляется генератором непосредственно, а не через усилитель, как в [6]. Анализ проводится на основе рассмотрения автоколебательной системы с двумя параметрически связанными степенями свободы.

1. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Исследование поставленной задачи может быть проведено для системы, представленной на рис. 1, если автогенератор осуществляет модуляцию индуктивности, используя магнитные нелинейные элементы — ферриты, или для системы рис. 2, если автогенератор модулирует емкость, используя нелинейную зависимость заряда на переходе полупроводникового диода от прикладываемого напряжения.

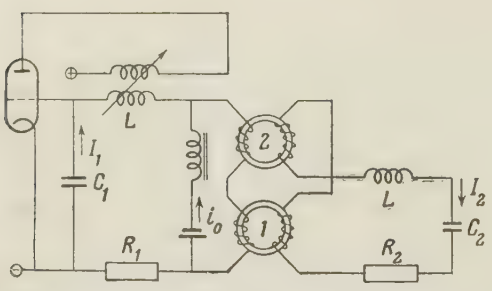


Рис. 1. Система с параметрической связью, осуществляемой ферритовыми тороидами

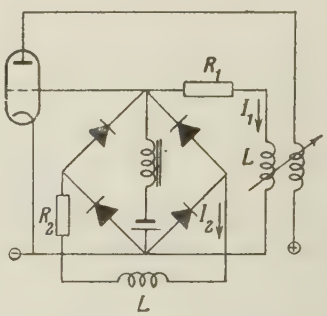


Рис. 2. Система с параметрической связью, осуществляемой полупроводниковыми диодами

Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.

Учитывая идентичность тороидов, встречное включение обмоток тороида 2 и равенство числа витков всех обмоток, зависимость магнитных потоков в тороидах от протекающих по обмоткам токов можно представить в виде

$$\Phi_1 = \Phi(I_1 + I_2), \qquad \Phi_2 = \Phi(I_1 - I_2).$$

Аппроксимируя функцию Φ рядом

$$\Phi(I) = \Phi_0 + \beta I + \gamma I^2,$$

можно получить уравнения, описывающие поведение системы:

$$\begin{aligned} &\ddot{X}_1 + 2m\ddot{X}_1\dot{X}_1 + 2\xi^4 m\ddot{X}_2\dot{X}_2 + 2\delta(X_1)\dot{X}_1 + \nu_1^2 X_1 = 0, \\ &(1 + 2m\dot{X}_1)\ddot{X}_2 + 2m\ddot{X}_1\dot{X}_2 + 2\delta_2\dot{X}_2 + \nu_2^2 X_2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $m = \frac{2\gamma}{L_0}$, C_1 — коэффициент параметрической связи; $\xi = \nu_1/\nu_2$, $\nu_i^2 = 1/L_0 C_i$; $L_0 = L + 2\beta$; X_i — напряжение на соответствующей емкости. Остальные обозначения общеприняты.

Второе уравнение (1) отличается от уравнения контура, в котором модуляция параметра осуществляется от источника неограниченной мощности, осуществляется от источника неограниченной мощности тем, что в нем внешнее воздействие, модулирующее параметр, зависит от возбуждаемых в контуре колебаний. Возбуждение параметрических колебаний в контуре, как известно, имеет место при $\xi = \nu_1/\nu_2 \simeq 2;\ 1;\ 2/3;\ 1/2;\ldots$ и достаточной глубине модуляции.

Отметим, что ограничение в разложении магнитного потока членами второго порядка дает возможность проследить обратную реакцию контура на генератор в случае $\xi \simeq 2$. Этот случай и рассматривается дальше. Чтобы проследить реакцию на генератор при других значениях ξ, необходимо в разложении магнитного потока учесть соответствующие члены.

Гармоническое приближение к решению системы (1) можно искать в виде

$$X_1 = A\cos(\nu_1 t + \varphi), \quad X_2 = B\cos\left(\frac{\nu_1}{2}t + \psi\right),$$

где A, B, φ и ψ являются медленно меняющимися функциями времени. Обычными методами можно получить укороченные уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \delta(A)\,A + m\nu_1^2 B^2\cos\Phi,\\
\dot{B} &= -\delta_2 B - \frac{1}{4}m\nu_1^2 AB\cos\Phi,\\
\dot{\varphi} &= m\nu_1^2\frac{B^2}{A}\sin\Phi,\\
\dot{\psi} &= \Delta + \frac{1}{4}m\nu_1^2 A\sin\Phi.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\Phi = 2\psi - f$; $\Delta = \nu_2 - \frac{\nu_1}{2}$; $\delta(A)$ — средний инкремент. Из последних двух уравнений (2) получаем следующее уравнение, определяющее поведение разности фаз Φ:

$$\dot{\Phi} = 2\Delta + \left(\frac{A}{2} - \frac{B^2}{A}\right)m\nu_1^2\sin\Phi. \tag{3}$$

Укороченные уравнения, описывающие поведение системы, представленной на рис. 2, имеют аналогичный вид.

Переходя к исследованию установившихся в системе колебаний, отметим, что в стационарных состояниях разность фаз Φ постоянна, в то время как сами фазы φ и ψ, линейно изменяясь во времени, характеризуют сдвиг частоты, обусловленный обратной реакцией нагружающего контура на генератор:

$$\dot{\varphi} = 2\dot{\psi} = \omega - \nu_1.$$

Учитывая это обстоятельство, для мягкого режима генерации, когда $\delta(A) = \delta_0\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)$, где A_0 — амплитуда ненагруженного генератора, можно получить уравнение для частоты колебаний

$$\left(\nu_2 - \frac{\omega}{2}\right)^2\left[1 - \frac{2\delta_2}{\delta_0} - \frac{\delta_2^2}{q^2} - \frac{\left(\nu_2 - \frac{\omega}{2}\right)^2}{q^2}\right]^2 - \left(\frac{2\delta_2}{\delta_0}\right)^2\Delta^2 = 0,$$

где

$$q = \left(\frac{A_0}{4}m\nu_1^2\right),$$

и уравнение «резонансных» кривых

$$\eta^2 = \left(1 - \frac{\delta_2^2}{q^2} - y\right)\left(\frac{2\delta_2}{\delta_0} - y\right)^2, \qquad (4)$$

где

$$\eta^2 = \left(\frac{2\delta_2}{\delta_0}\right)^2 \frac{\Delta^2}{q^2}; \qquad y = 2\frac{2\delta_2}{\delta_0}\frac{B^2}{A^2} = 1 - \frac{A^2}{A_0^2}.$$

Семейство амплитудных и частотных кривых для случая $2\delta_2/\delta_0 = 1/4$ представлено на рис. 3 и 4.

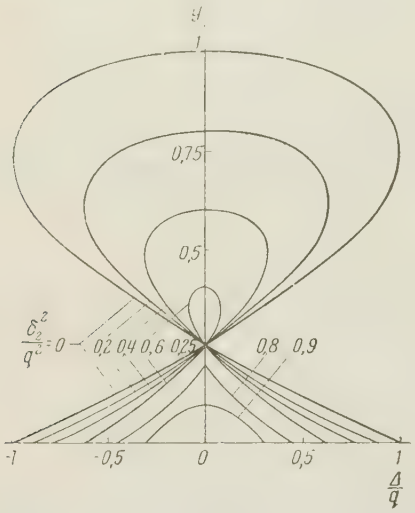


Рис. 3. Амплитудные кривые для случая $2\delta_2/\delta_0 = 1/4$

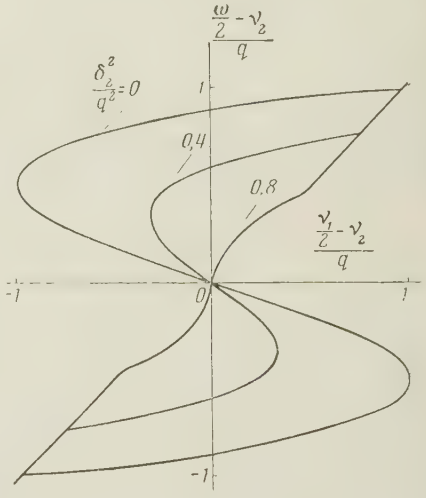


Рис. 4. Частотные кривые для случая $2\delta_2/\delta_0 = 1/4$

В случае $\frac{2\delta_2}{\delta_0} \geqslant 1 - \frac{\delta_2^2}{q^2}$ амплитудные кривые пересекают ось $\Delta = 0$ в точке $y = 1 - \frac{\delta_2^2}{q^2}$. При этом амплитудные и частотные кривые однозначны.

В случае $\frac{2\delta_2}{\delta_0} < 1 - \frac{\delta_2^2}{q^2}$ пересечение с осью $\Delta = 0$ происходит в точках $y = 2\delta_2/\delta_0$ и $y = 1 - \frac{\delta_2^2}{q^2}$. В этом случае амплитудные и частотные кривые становятся неоднозначными, что приводит к качественному изменению в поведении системы, характеризуемому явлением затягивания.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ. СЛУЧАИ СЛАБОЙ, СРЕДНЕЙ И СИЛЬНОЙ НАГРУЗОК ГЕНЕРАТОРА

Условия устойчивости, полученные по методу Ляпунова, имеют для мягкого режима генерации вид

$$y < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_0}\right),$$

$$y^4 - \left(1{,}5 - 2\frac{\delta_2}{\delta_0} + 2\frac{\delta_2^2}{q^2}\right)y^3 + \left(0{,}5 - 3\frac{\delta_2}{\delta_0} + 3\frac{\delta_2^2}{q^2} + 8\frac{\delta_2}{\delta_0}\frac{\delta_2^2}{q^2} - \frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\right)y^2 +$$

$$+ \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} - \frac{\delta_2^2}{q^2} - 8\frac{\delta_2}{\delta_0}\frac{\delta_2^2}{q^2} - 4\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\frac{\delta_2^2}{q^2} + \frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\right)y + 2\frac{\delta_2}{\delta_0}\frac{\delta_2^2}{q^2}\left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_0}\right) > 0, \qquad (5)$$

$$y < \frac{2}{3}\left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_0} - \frac{\delta_2^2}{q^2}\right).$$

Назовем первое условие устойчивости амплитудным, второе условие — сложным и третье условие — частотным.

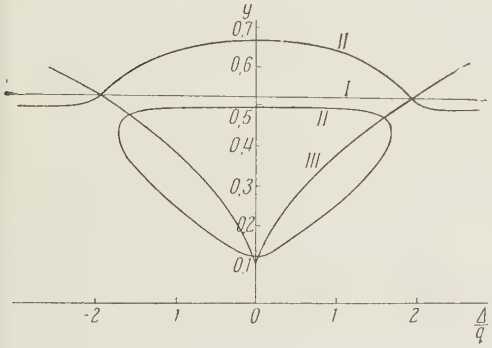


Рис. 5. Границы устойчивости для случая $2\delta_2/\delta_0 = 0{,}1$

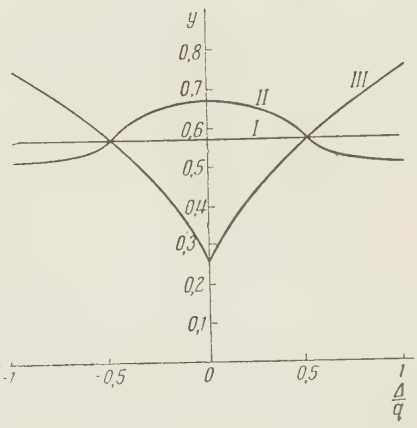


Рис. 6. Границы устойчивости для случая $2\delta_2/\delta_0 = 1/4$

Условия устойчивости удобно рассматривать как границы, разделяющие на плоскости резонансных кривых области устойчивых и неустойчивых состояний. Частотное и сложное условия дают уравнения границ устойчивости после замены знака неравенства на знак равенства и исключения δ_2^2/q^2 при помощи уравнения резонансных кривых (4). Таким образом, получаем уравнение границы устойчивости для сложного условия:

$$\eta^2 = \frac{3(y-1)\left(y - \frac{2}{3}\right)\left[(y-0{,}5)\left(y - \frac{2\delta_2}{\delta_0}\right) + \frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\right]}{(y-0{,}5)\left[-2y(y-1) + 8\frac{\delta_2}{\delta_0}(y-0{,}5) - 4\frac{\delta_2^2}{\delta_0^2}\right]}\left(\frac{2\delta_2}{\delta_0} - y\right)^2 \qquad (6)$$

и для частотного условия:

$$\eta^2 = \frac{1}{2}\left(y - \frac{2\delta_2}{\delta_0}\right)^3. \qquad (7)$$

Границы устойчивости представлены на рис. 5, 6 и 7. При этом цифрой *I* обозначена граница по амплитудному условию, цифрой *II* — по сложному, а цифрой *III* — по частотному условиям устойчивости.

Частотное условие означает, что устойчивыми могут быть только участки амплитудных кривых, ограниченные точками, в которых касательная вертикальна:

$$\frac{dy}{d\left(\nu_1 - \frac{\nu_2}{2}\right)} = \infty,$$

и соответствующие им внешние участки частотных кривых, где

$$\frac{d\omega}{d\left(\nu_1 - \frac{\nu_2}{2}\right)} > 0.$$

Найденное уравнение (7) является уравнением геометрического места точек, в которых касательная к амплитудным кривым вертикальна.

Граница устойчивости (6), соответствующая сложному условию, имеет при $2\delta_2/\delta_0 < 1/4$ две ветви, пересекающиеся с амплитудными кривыми.

Замкнутая ветвь лежит в области $2\delta_2/\delta_2 < y < 0{,}5$. При $2\delta_2/\delta_0 = 1/4$ эта ветвь стягивается в точку $\Delta = 0$, $y = 3/8$.

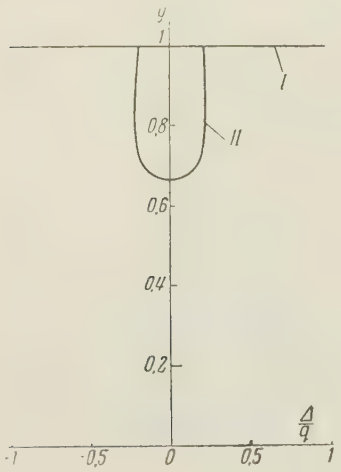


Рис. 7. Границы устойчивости для случая $2\delta_2/\delta_0 = 2$

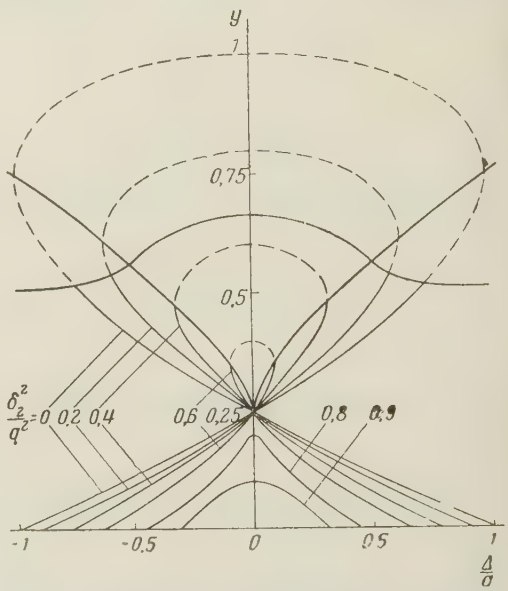


Рис. 8. Амплитудные кривые и границы устойчивости для случая $2\delta_2/\delta_0 = 1/4$. Пунктиром обозначены неустойчивые состояния

Другая ветвь границы (6) всегда проходит через точку $\Delta = 0$, $y = 2/3$ и при $2\delta_2/\delta_0 < (1 + \sqrt{5})/3$ лежит ниже этой точки. При $2\delta_2/\delta_0 = (1 + \sqrt{5})/3$ она превращается в прямую $y = 2/3$. При $2\delta_2/\delta_0 > (1 + \sqrt{5})/3$ эта ветвь, проходя через точку $\Delta = 0$, $y = 2/3$, лежит выше ее. При $2\delta_2/\delta_0 > 2$ она замыкается в точке $\Delta = 0$, $y = 1$.

Границей устойчивости, построенной по амплитудному условию, является прямая линия, пересекающая при $2\delta_2/\delta_0 < 2/3$ границу частотного условия. Легко убедиться в том, что точки пересечения лежат на границе, соответствующей сложному условию и проходящей через $y = 2/3$. Отсюда видно, что выполнение сложного и частотного условий является при $2\delta_2/\delta_0 < 2/3$ необходимым и достаточным условием устойчивости.

При $2\delta_2/\delta_0 \to 2/3$ точки пересечения всех трех границ сближаются и при $2\delta_2/\delta_0 = 2/3$ сливаются в точке $\Delta = 0$, $y = 2/3$. При $2\delta_2/\delta_0 \geqslant 2/3$ сложное условие становится необходимым и достаточным условием устойчивости.

С учетом устойчивости удобно рассматривать поведение генератора для случая слабой ($2\delta_2/\delta_0 < 1/4$), средней ($1/4 \leqslant 2\delta_2/\delta_0 < 2/3$) и сильной ($2\delta_2/\delta_0 \geqslant 2/3$) нагрузок генератора.

В случае средней нагрузки генератора (рис. 8) при $1 - \frac{2\delta_2}{\delta_0} \leqslant \frac{\delta_2^2}{q^2} \geqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_0}\right)$ перескок частоты колебаний и амплитуд при изменении

расстройки парциальных частот, например, имеет место в точках частотной и амплитудной кривых, где касательная к этим кривым вертикальна. При $\frac{\delta_2^2}{q^2} < \frac{1}{4}\left(1+\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)$ перескок происходит раньше в силу сложного условия устойчивости.

В случае слабой нагрузки генератора (рис. 9) появление замкнутой ветви границы, построенной по сложному условию, приводит к тому, что при $1-\frac{2\delta_2}{\delta_0} > \frac{\delta_2^2}{q^2} \geqslant \frac{1}{4}\left(1+\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)$ можно дойти до точек с вертикальной касательной только для δ_2^2/q^2, несколько меньших $1-\frac{2\delta_2}{\delta_0}$, и для δ_2^2/q^2, не сильно превышающих $\frac{1}{4}\left(1+\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)$.

В случае весьма слабой нагрузки генератора ($2\delta_2/\delta_0 \to 0$) можно получить устойчивые петли затягивания на амплитудных кривых только для $\delta_2^2/q^2 \sim 0$. При других значениях δ_2^2/q^2 амплитудные кривые не имеют

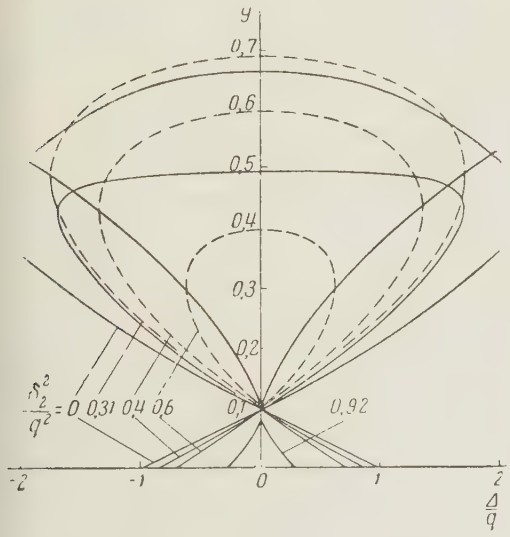


Рис. 9. Амплитудные кривые и границы устойчивости для случая $2\delta_2/\delta_0 = 0{,}1$. Пунктиром обозначены неустойчивые состояния

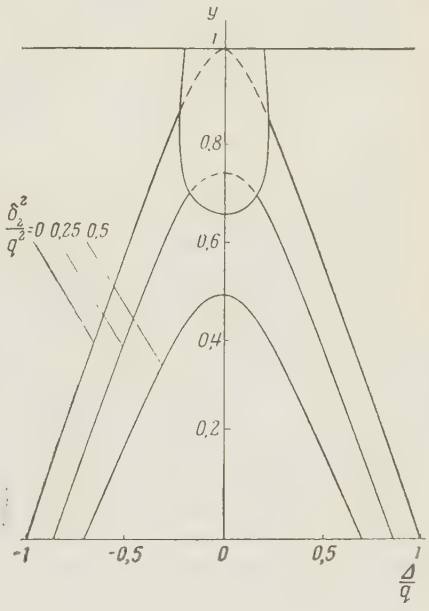


Рис. 10. Амплитудные кривые и границы устойчивости для случая $2\delta_2/\delta_0 = 2$. Пунктиром обозначены неустойчивые состояния

устойчивых точек, лежащих выше точки самопересечения этих кривых $y = 2\delta_2/\delta_0$, за исключением появляющихся при $y \simeq 0{,}5$ устойчивых изолированных участков амплитудных кривых, для которых $\frac{\delta_2^2}{q^2} \sim \frac{1}{4}\left(1+\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)$ и которых нельзя достигнуть простым изменением расстроек. Чтобы прийти на эти участки, необходимо при $\delta_2^2/q^2 \sim 0$ установить нужную расстройку и затем уменьшить коэффициент связи m.

В случае сильной нагрузки (рис. 10) целиком устойчивыми могут быть только те из однозначных амплитудных и частотных кривых, для которых $\delta_2^2/q^2 > 1/3$. При $\delta_2^2/q^2 < 1/3$ в области расстроек, близких к нулю, всегда имеются неустойчивые участки. В них не может наступить провал генерации, что имеет место в обычном автогенераторе с двумя степенями свободы. Это связано с тем, что самовозбуждение колебаний генератора в рассматриваемом случае происходит до некоторой амплитуды, как и

в ненагруженном генераторе. Начиная с этой амплитуды, в нагружающем контуре возникают параметрические колебания, которые оказывают сильное обратное воздействие на генератор. Такое воздействие приводит к частичному или даже полному подавлению колебаний в генераторе и, следовательно, прекращению параметрического возбуждения контура. После этого цикл периодически повторяется.

Проведенное экспериментальное исследование показало, что в указанном случае колебания носят автомодуляционный характер, переходя в случае нулевых расстроек в прерывистую генерацию.

В заключение необходимо отметить, что основные выводы изложенного теоретического исследования были подвергнуты сравнению с экспериментом. Это сравнение показало качественно правильное описание закономерностей, присущих автоколебательным системам с двумя параметрически связанными степенями свободы.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность К. Ф. Теодорчику за плодотворное обсуждение изложенных в статье результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, Лекции по колебаниям, Изд. АН СССР, 1955.
2. С. М. Рытов, А. М. Прохоров, М. Е. Жаботинский, ЖЭТФ, 1945, **15**, 10, 557—571; 11, 613—628.
3. Ю. Б. Кобзарев, Радиотехника, 1950, **5**, 2, 41.
4. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, ГТТИ, 1952.
5. А. А. Витт, Г. С. Горелик, ЖТФ, 1933, **3**, 2—3, 294.
6. А. Н. Чарахчьян, ЖТФ, 1936, **6**, 7, 1230.
7. Ю. А. Кравцов, Явление насыщения в усилителях на полупроводниковых диодах, тезисы докл. на IV Всесоюзной конференции МВО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1960, 68.

Поступила в редакцию
31 I 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 10

ВРЕМЕННЫЕ (СПЕКТРАЛЬНЫЕ) ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЛУКТУАЦИЙ РАЗНОСТЕЙ ФАЗ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН В ТРОПОСФЕРЕ

А. В. Мень

Приведены для широкого интервала частот усредненные «статистические» спектральные характеристики флуктуаций разностей фаз, полученные в результате экспериментальных измерений флуктуаций на волне $\lambda = 10$ *см* над морем на фиксированной трассе длиной 33 *км*.

Полученные данные относятся к случаю «поперечной» корреляции с разными расстояниями между приемными антеннами (базами) d от 2 до 100 *м*, соответствующими различному соотношению $d/l \gtrsim 1$ (l — характерный масштаб корреляции). Измерения проводились как в освещенной области, так и в области полутени и тени.

Экспериментальное исследование временны́х, в частности спектральных, характеристик флуктуаций, возникающих при распространении радиоволн в тропосфере, представляет интерес для теории распространения, а также при изучении физических процессов, обусловливающих эти флуктуации. В ряде более ранних теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию флуктуаций [1—10], основное внимание уделялось определению их вторых моментов (средних квадратов, пространственных корреляционных функций), и лишь в последнее время в [15] были приведены результаты подробных исследований спектральных характеристик флуктуаций абсолютной фазы (электрической длины пути)*, проведенных в условиях, близких к неограниченному пространству. Настоящая работа посвящена экспериментальному определению спектральных характеристик флуктуаций разностей фаз в условиях, где измерения проводились непосредственно над поверхностью раздела (морем). Следует отметить, что некоторые, в основном качественные, данные относительно спектров разностно-фазовых флуктуаций в литературе уже приводились [11—14], однако при этом в большинстве случаев спектральные характеристики воспроизводились недостаточно полно. Уже в этих предварительных исследованиях отмечалось, что спектры флуктуаций, носящие низкочастотный характер, заключаются в интервале от сотен (десятков) герц вплоть до весьма низких частот порядка 10^{-3} *гц* и ниже. Существенным их отличием является нестационарность, приводящая к «выбросам» и непостоянству спектральных распределений во времени.

Учитывая нестационарность флуктуаций абсолютных величин фаз и амплитуд, возникающих при распространении в тропосфере, отметим, что измерение их временны́х или пространственных приращений (чем и являются флуктуации разностей фаз в случае фазовых измерений) представляет особый интерес. Известно, что для нестационарных функций $f(t)$ замена их приращениями во времени $f(t) - f(t_1)$ либо в пространстве $f(\vec{r}) - f(\vec{r}_1)$, при достаточно малых приращениях, может привести к существенной стационаризации процесса.

* Под абсолютной фазой понимается фаза волны в точке приема, измеренная относительно точки излучения.

При таких измерениях как определение пространственных разностей фаз этот интерес обусловливается также тем, что разности фаз находят непосредственное практическое применение в угломерных системах. При этом ожидаемая повышенная стационарность этих флуктуаций сравнительно с флуктуациями абсолютной фазы может быть связана с тем, что медленные во времени изменения, собственно обусловливающие нестационарность процессов, должны быть существенно скоррелированы в различных точках пространства при не слишком больших расстояниях между ними. Вследствие этого в разностных эффектах должно наблюдаться относительное ослабление низкочастотных спектральных составляющих.

Естественно, что при подобных измерениях желательно воспроизводить спектры флуктуаций в возможно более широкой полосе с минимальными искажениями. Отметим, что если воспроизведение флуктуационного спектра в области высоких частот (10^2— 10^1 *гц*) не вызывает особых трудностей, то точность воспроизведения очень низких составляющих обычно ограничивается степенью эталонности аппаратуры и конечным временем измерения.

В описываемой работе исследовался спектр флуктуаций в интервале от 0,005—0,01 до 100—200 *гц*. Экспериментальные измерения проводились над морем на фиксированной трассе длиной более 30 *км* на $\lambda = 10$ *см* при вертикальной поляризации излучения. Методика этих исследований, подобная приведенной в [13], состояла в измерении и записи флуктуаций разностей фаз ($\delta\varphi_1 - \delta\varphi_d$) между системой разнесенных в пространстве от 2 до 100 *м* приемных антенн, расположенных вдоль линии, перпендикулярной направлению распространения*. Для повышения точности измерений опыты проводились при неизменном положении приемных и передающих антенн. Высоты подъема приемных антенн (h) над уровнем моря составляли около 4 *м*, передающих (h_0)—35; 18 и 9 *м* соответственно, что обеспечивало прием как в освещенной области, так и в области полутени и тени. Измерения велись в течение длительного периода (летом, осенью и зимой) при различных метеорологических условиях, причем в каждом опыте записи проводились для всех трех высот передатчика и расстояний между приемными антеннами 2; 5; 10; 30 и 100 *м*.

Для оценки нестационарности каждое измерение, длительностью 5—10 *мин*, повторялось дважды. Спектральные характеристики флуктуаций определялись различными методами путем последующей численной обработки полученных записей. Один из методов состоял в дискретизации непрерывной записи (определении через равные интервалы серии дискретных отсчетов) и нахождении составляющих Фурье на ряде дискретных частот путем численного счета цифровыми счетными машинами при помощи программных таблиц. Таблицы эти составлялись методом «180 ординат» так, чтобы интервал обработки соответствовал 1—3 периодам наиболее низкой частоты, а интервал дискретизации (время между соседними отсчетами) — не более полупериоду наиболее высокой частоты. В этом случае интервал частот $F_{\text{макс}}/F_{\text{мин}}$, охватываемых расчетом, составлял не менее 30. При необходимости определения спектра в более широком диапазоне частот флуктуаций подобный расчет проводился неоднократно при неизменной общей длительности записи и различных интервалах дискретизации. Это позволяло несколько сократить общий объем вычислений, благодаря экономичности расчетов низкочастотных составляющих, при которых можно без понижения точности существенно уменьшить общее число отсчетов.

Другой, «непрерывный» способ обработки основывался на использовании механического коррелятора (амплитуды синусной и косинусной

---

* Такое расположение антенн соответствует измерению так называемой поперечной пространственной корреляции флуктуаций.

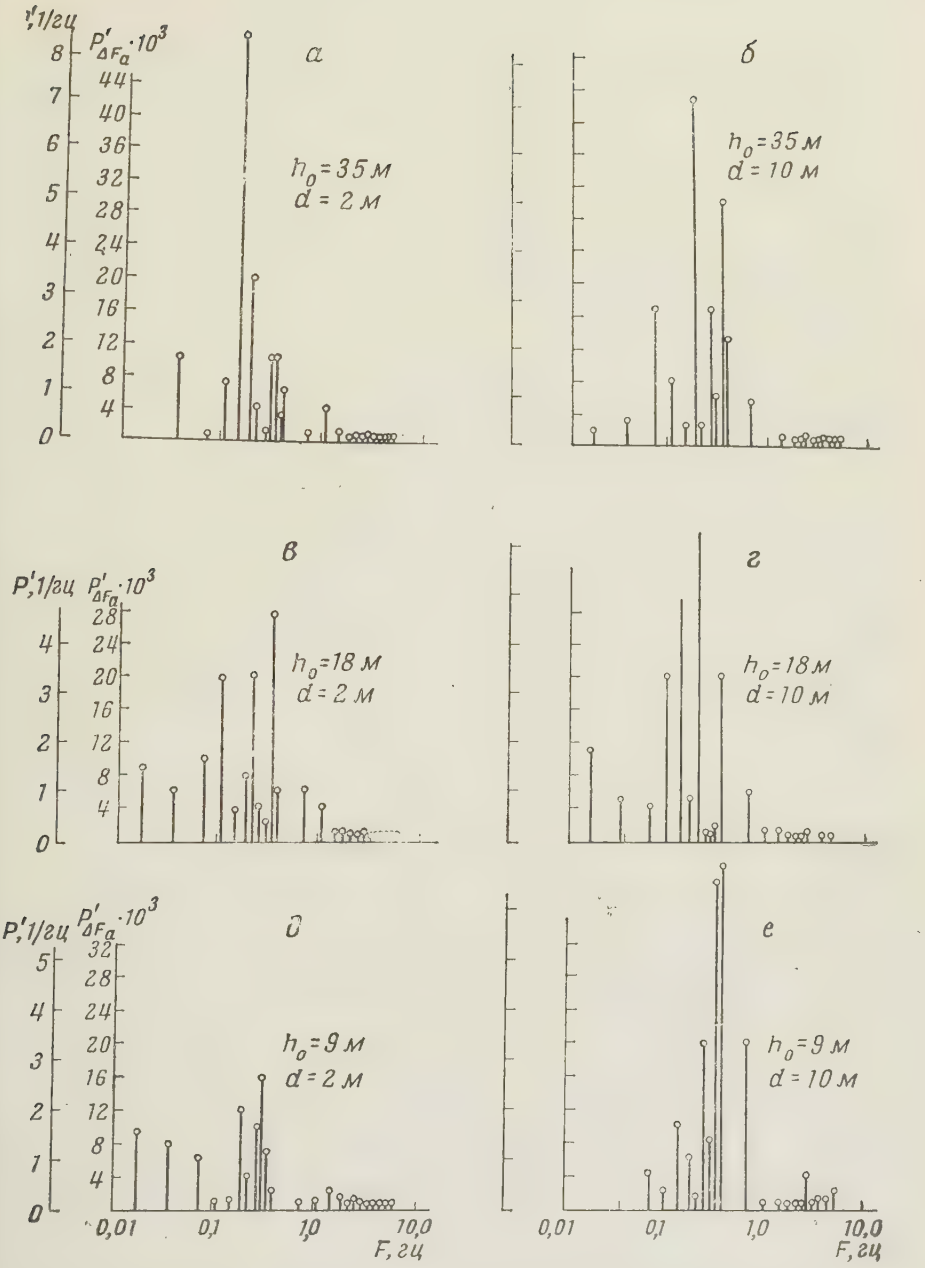


Рис. 1. Безразмерные текущие спектры интенсивности флуктуаций разностей фаз $l'_{\Delta F_a} = f(F)$; $P'_{\Delta F_a}$ — интенсивность флуктуаций в полосе $\Delta F_a = 0{,}006$ *гц*, нормированная к общей интенсивности флуктуаций; F — частота флуктуаций

составляющих Фурье вычислялись как функции корреляции между исследуемым процессом и гармоническими колебаниями различной частоты).

Все эти численные методы позволяли определять текущие спектры интенсивности* (величину

$$\frac{2}{T^2}\left|\int_T f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt\right|^2,$$

где T — длительность интервала разложения), физически соответствующие анализу процесса при помощи так называемого параллельного анализатора, состоящего из серии узкополосных фильтров с полосой анализа $\Delta F_a \simeq 1/T$, настроенных на различные частоты [16, 17].

В проведенном исследовании ставилась задача определения спектральных характеристик флуктуаций разностей фаз в зависимости от высоты подъема антенн передатчика h_0 и расстояния d между приемными антеннами (базами) при различных метеорологических условиях. С этой целью было вычислено более 600 «текущих» спектров разностно-фазовых флуктуаций, примером которых является рис. 1.

На этом рисунке приведена зависимость интенсивности флуктуаций $P'_{\Delta F}$ от частоты в интервале от 0,01 до 10 *гц* при эквивалентной полосе анализа~0,006 *гц*, нормированная в каждом случае к общей интенсивности флуктуаций, выражаемой величиной средних квадратов. Здесь же нанесен масштаб величины p'(в 1/*гц*), определяемой как $P'_{\Delta Fa}/\Delta F_a$, которая может характеризоваться (с точностью до постоянной) как усредненная нормированная спектральная плотность интенсивности, удовлетворяющая условию нормировки $\int_F p'dF = 1$. Как следует из рис. 1, в этом опыте независимо от высоты передатчика h_0 и расстояния между приемными антеннами d отмечаются качественно подобные текущие спектры. Отметим, что общая интенсивность флуктуаций в этом измерении также практически не зависела от высоты h_0. Наблюдалась типичная существенная неравномерность распределения интенсивности по частотам (выбросы), существенно затрудняющая анализ основных закономерностей.

В отдельных случаях, например при анализе в пределах интервала около 0,006 *гц*, составляющего не более 1% от общей полосы частот, наблюдались выбросы, доходящие до 10—15% от общей интенсивности флуктуаций, свидетельствующие о повышенном содержании в спектре отдельных гармонических составляющих.

Из приведенных данных следует, что на более высоких частотах спектра обычно отмечается тенденция резкого убывания спектральной плотности с увеличением частоты, которая наиболее четко выражена при максимальных значениях d и h_0. Для данного опыта характерно, что наибольшие спектральные плотности соответствуют частотному интервалу от 0,1 до 1 *гц*, хотя в большинстве проведенных измерений в этом интервале с понижением F обычно еще наблюдался рост интенсивности флуктуаций.

Анализ большого числа измерений текущих спектров флуктуаций подтвердил результаты предварительных измерений [14] относительно их существенной нестационарности. Если общая интенсивность флуктуаций в ряде опытов была сравнительно стабильной с точностью до 0,5—1 *дб* (квазистационарные измерения) и лишь в отдельных случаях ее изменения доходили до 3—5 *дб* (нестационарные измерения), то в то же время в пределах узких интервалов частот, как правило, наблюдались значительно бóльшие изменения величины интенсивности порядка 10—20 *дб* и более. Нестационарность текущих спектров проявлялась также

* Т. е. спектральное разложение функции, соответствующее данному временно́му интер вал у.

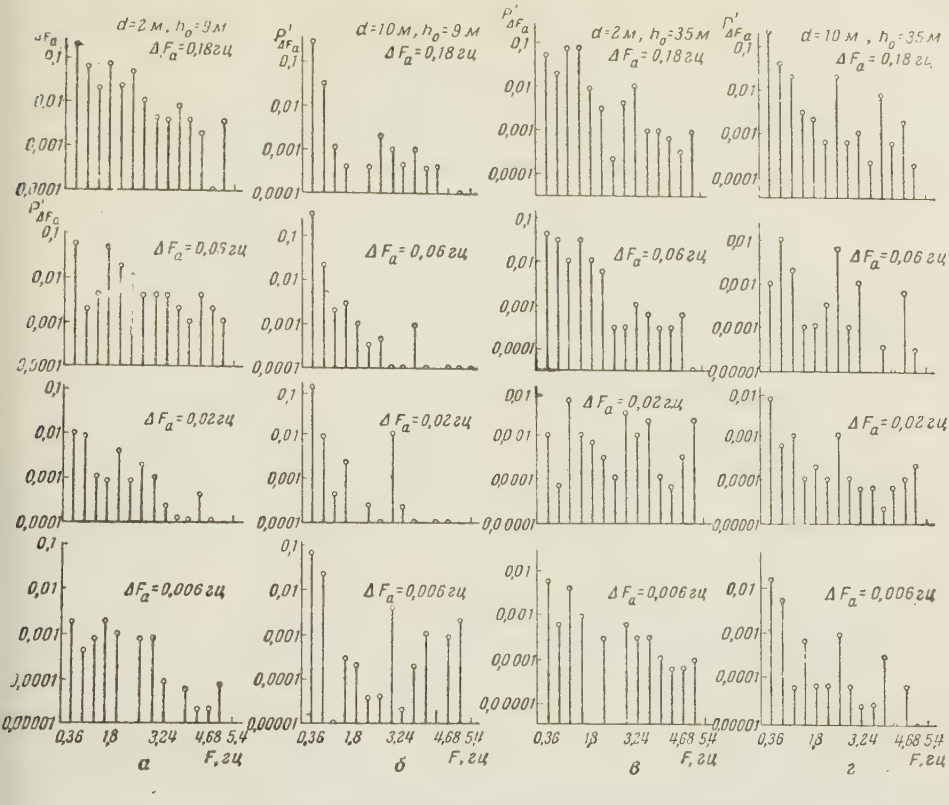


Рис. 2. Зависимость текущих спектров флуктуаций от длительности интервала измерения, определяющего эквивалентную полосу анализа ΔF_a

в их зависимости от длительности интервала измерения. При изменении длительности измерений наряду с некоторым изменением общей интенсивности флуктуаций (обычно с увеличением интервала измерения отмечался рост интенсивности, связанный с проявлением все более медленных составляющих), наблюдается также существенное перераспределение интенсивности по частотам.

Типичные измерения текущих спектров в зависимости от длительности интервала измерения (обработки) иллюстрируются рис. 2. Здесь приведены рассчитанные по экспериментальным записям значения мощности флуктуаций, заключенные в полосе ΔF_a, на разных частотах в интервале от 0,36 до 5,04 *гц* при значениях эквивалентной полосы анализа ΔF_a 0,18; 0,06; 0,02 и 0,006 *гц*. Анализ подобных расчетов показывает, что в среднем имеет место тенденция уменьшения интенсивности флуктуаций, заключенной в определенной полосе, при ее сужении, хотя при этом и имеется большой разброс расчетных данных, связанный с нестационарностью.

В качестве примера может служить рис. 3, на котором показаны для нескольких настроек F от 0,36 до 2,16 *гц* изменения, в зависимости от длительности анализа T, интенсивности флуктуаций P_T, заключенной в полосе $\sim 1/T$, отнесенной к значению P_{T_0}, соответствующему минимальному времени $T_0 = 5{,}6$ *сек*. Как следует из рис. 3, для всех приведенных настроек уменьшение мощности с ростом времени анализа в среднем, хотя и с большим разбросом, согласуется с зависимостью, пропорциональной T^{-1}, свойственной стационарным процессам типа сплошного «белого» шума.

Представляется также целесообразным определить зависимость усредненной спектральной плотности, определяемой как отношение интенсивности флуктуаций $P'_{\Delta F_a}$ к величине полосы ΔF_a, в которой они заключены, от частоты и полосы анализа. Подобные результаты для расстояний d между приемными антеннами 2 и 10 *м* и высот подъема антенн передатчика h_0 9, 18 и 35 *м* приведены на рис. 4, где различными знаками

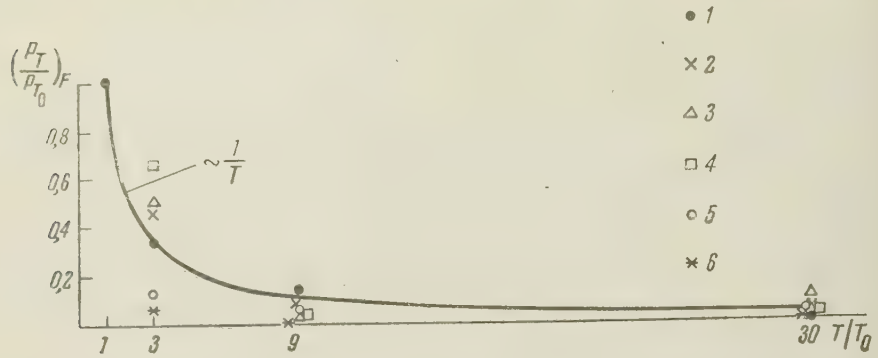


Рис. 3. Изменение интенсивности флуктуаций P_T, заключенной в полосе $1/T$, в зависимости от времени анализа и частоты настройки $F(d = 2\ м, h_0 = 18\ м)$: *1* — $F = 0{,}36$ *гц*; *2* — $F = 0{,}72$ *гц*; *3* — $F = 1{,}08$ *гц*; *4* — $F = 1{,}44$ *гц*; *5* — $F = 1{,}8$ *гц*; *6* — $F = 29{,}1$ *гц*

нанесены данные, соответствующие анализу с полосой от 0,006 до 0,18 *гц*. Здесь же пунктиром проведены усредненные зависимости p' (F), относительно которых разброс экспериментальных данных составлял в среднем ± 5 *дб*, возрастая в ряде случаев до ± 10 *дб* и выше. Как следует из рис. 4, несмотря на разброс данных во всех случаях отмечалось быстрое убывание спектральной плотности с ростом частоты. При этом усредненная зависимость p' (F) изменялась приблизительно пропорционально $F^{-1,5}$ при базе d на приемном пункте равной 2 *м*; и $F^{-2,5}$ при $d = 10$ *м*. В то же время влияние высоты подъема на зависимость $p'(F)$ в этом опыте выразилось менее четко.

В результате большого числа измерений можно отметить, что вообще высотная зависимость спектральных характеристик флуктуаций разностей фаз, так же как и высотная характеристика для общей интенсивности флуктуаций [13, 14], подвержена от опыта к опыту значительным изменениям, и отклонения от типичных стандартных условий здесь наблюдаются значительно чаще, чем, например, в зависимости спектральных характеристик от величины базы. Приведенные на рис. 4 данные, так же как и на предыдущих рисунках, относятся как раз к одному из таких опытов, где наблюдались аномалии в распределении общей интенсивности флуктуаций по высоте. В отличие от обычной высотной зависимости флуктуаций $\overline{(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_d)^2} \sim h_0^{-2}$ [8, 14], в этом измерении она отсутствовала в явном виде. Следует заметить, что отмечаемая на рис. 4 зависимость спектральной плотности от частоты для $d = 10$ *м*, в среднем пропорциональная $F^{-2,5}$, хорошо согласуется с результатами исследования флуктуаций абсолютной фазы $\delta\varphi$ в [15], где аналогичная характеристика спектральной плотности в широком интервале частот аппроксимировалась законом $F^{-2,8}$.

Таким образом, при достаточно больших базах d ($d \gg l$, где l — характерный размер, на котором существенно ослабляется корреляция флуктуаций диэлектрической проницаемости турбулентной неоднородной среды [2—5]) спектральные плотности флуктуаций абсолютной фазы и разно-

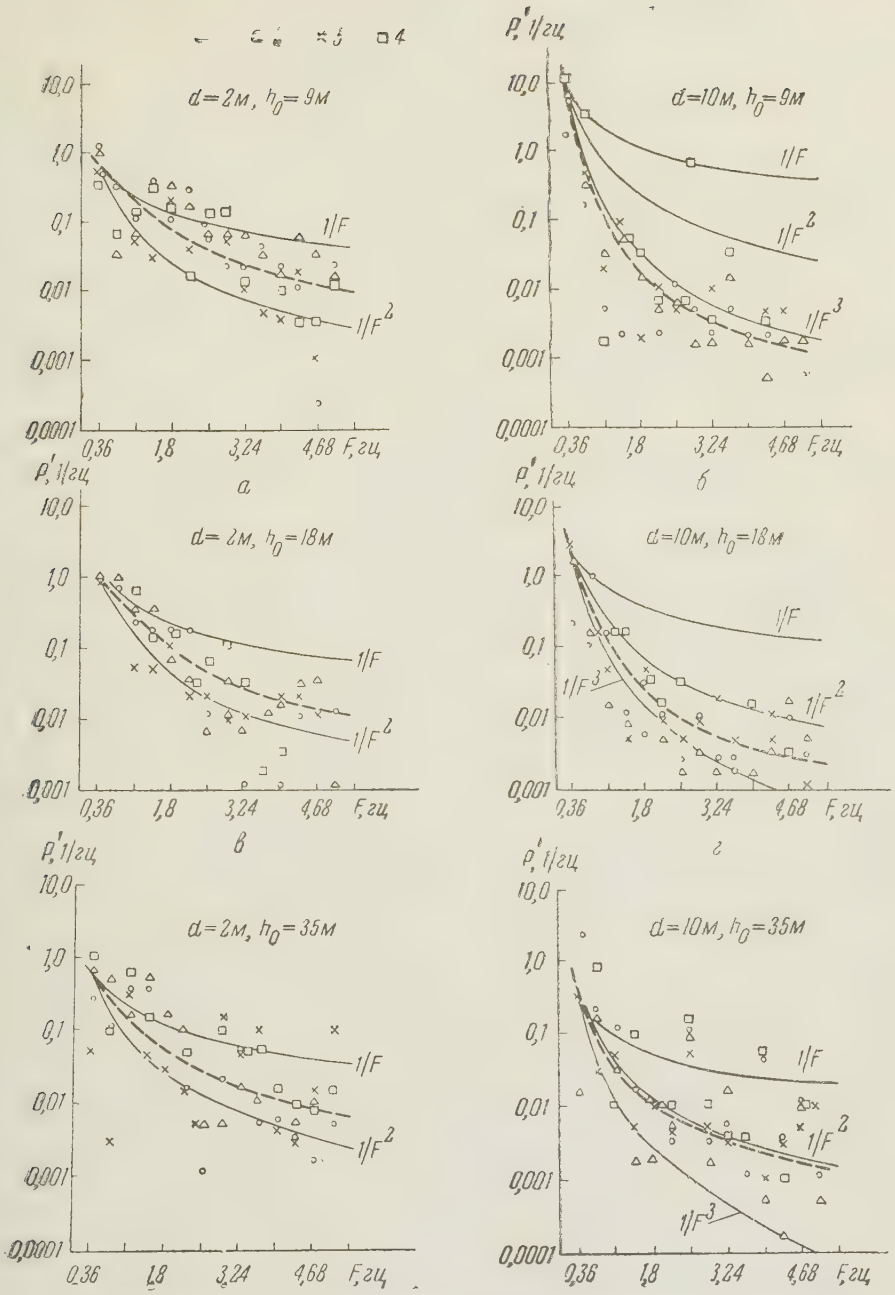


Рис. 4. Зависимость усредненной спектральной плотности флуктуаций разностей фаз p' (при анализе с различной полосой ΔF_a) от частоты F, базы d и высоты h_0:

1 — $\Delta F_a = 0{,}18$ гц; 2 — $\Delta F_a = 0{,}06$ гц; 3 — $\Delta F_a = 0{,}02$ гц; 4 — $\Delta F_a = 0{,}006$ гц

сти фаз с точностью до постоянной практически совпадают, особенно в области высокочастотных составляющих. Можно показать, что этот результат не является случайным. Представляя автокорреляционную функцию флуктуаций разности фаз $B(\tau)$ в виде

$$B(\tau) = \overline{[\delta\varphi_1(t) - \delta\varphi_d(t)][\delta\varphi_1(t+\tau) - \delta\varphi_d(t+\tau)]} \quad (1)$$

и учитывая, что при $d \gg l$, за исключением узкого сектора углов вдоль направления распространения [18], пространственные корреляционные члены типа $\overline{\delta\varphi_1 \delta\varphi_d}$ при усреднении в достаточном интервале стремятся к нулю,

$$B(\tau) \simeq B_1(\tau) + B_d(\tau); \quad (2)$$

определяя спектральную плотность как преобразование Фурье от корреляционной функции $B(\tau)$,

$$p(\omega) = p_1(\omega) + p_d(\omega) \quad (3)$$

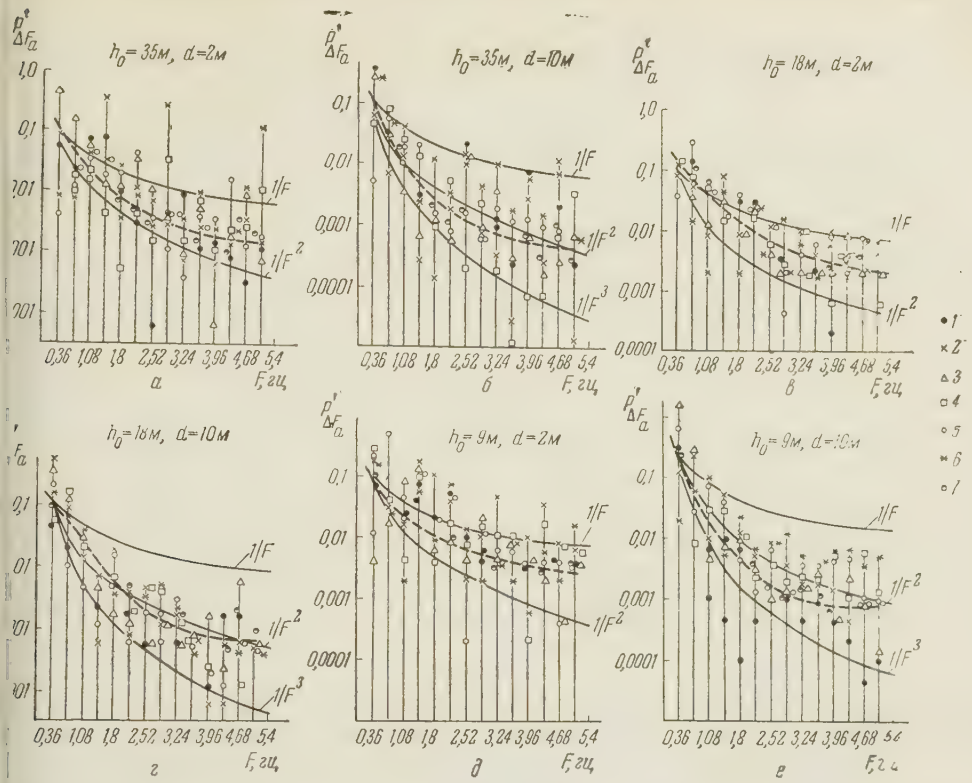
или при усреднении по ансамблю независимых измерений, полагая среду в среднем (статистически) однородной при $d \ll L$ (L — длина трассы),

$$\overline{B}_1 = \overline{B}_d, \quad \overline{p}(\omega) = 2\overline{p}_1(\omega). \quad (4)$$

Здесь $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_d$— флуктуации абсолютной фазы в точках, разнесенных в пространстве на d; $B_{1(d)}(\tau)$, $p_{1(d)}(\omega)$— «текущие» автокорреляционные функции и спектральные плотности флуктуаций абсолютной фазы в соответствующих точках.

Отметим, что такой случай имеет место на рис. 4 для базы $d = 10$ *м*, так как параметр l, измеренный экспериментально по пространственным структурным функциям, составлял в этих измерениях для всех высот 2—3 *м**. Уменьшение базы сопряжено с увеличением корреляции прежде всего низкочастотных составляющих, благодаря чему ослабляется их вклад в интенсивность разностно-фазовых флуктуаций. Поскольку это приводит к уменьшению возрастания спектральной плотности с понижением частоты, естественным является результат для $d = 2$ *м* ($d \simeq l$), где частотная зависимость спектральной плотности $p(F)$ выражена менее резко, примерно пропорционально $F^{-1,5}$. По-видимому, при меньших базах следует ожидать дальнейшего ослабления этой зависимости, т. е. относительного расширения спектра флуктуаций. Отмеченная выше нестационарность интенсивности исследуемых флуктуаций и резко выраженная при конечных временах измерения нестационарность их текущих спектров, обусловленные по-видимому, наличием в спектрах весьма низкочастотных составляющих, в ряде случаев исключают практически непосредственный анализ основных закономерностей, свойственных спектральным характеристикам. Для их исследования может быть использована статистическая обработка текущих спектров, определенных в ряде независимых измерений. В таком статистическом спектре интенсивность на каждой настройке может определяться как среднее по ансамблю, либо как значения (уровни) интенсивности, превышаемые экспериментальными данными с определенной вероятностью. В последнем случае для интенсивности флуктуаций на различных частотах, измеряемой в определенной полосе анализа ΔF_a, определяются интегральные распределения, например вероятность превышения интенсивностью $\overline{p}_a$ различных значений.

* Экспериментальное исследование пространственных структурных функций $\overline{(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_d)^2} = f(d)$ описано в [13, 14]. Там же показано, что флуктуации, обусловленные только низкочастотными составляющими спектра, скоррелированы в пространстве на значительно бо́льшие расстояния, чем флуктуации, обусловленные только высокочастотными составляющими спектра.



ис. 5. Сопоставление текущих спектров флуктуаций с усредненной зависимостью, ответствующей вероятности превышения $W = 50\%$ (пунктир), при различных h_0 и d:

— 1-е измерение; 2 — 2-е измерение; 3 — 3-е измерение; 4 — 4-е измерение; 5 — 5-е измерение; 6 — 6-е измерение; 7 — значения с $W = 50\%$

Результат подобной обработки 30 текущих спектров при $\Delta F_a = 0{,}18$ *гц* интервале 0,36—5,04 *гц* приведен на рис. 5 для различных h_0 и d. а рисунке специальными значками отмечены уровни с вероятностью $= 50\%$ и пунктиром — проведенная среди них усредненная зависи-ость $P'_{\Delta F_a}(F)$. Здесь же для сопоставления различными значками нане-ены значения интенсивности в указанной полосе $P'_{\Delta F_a}$ для ряда настроек, несенные к величине полной интенсивности; эти значения были полу-ены в первых шести измерениях (интервал между измерениями соста-ял около 5,6 *сек*).

Как следует из приведенных данных, разброс значений с 50%-й ве-ятностью относительно усредненной зависимости не превышал в сред-м $\pm 2{,}5$ *дб*, в то время как для отдельных измерений он достигал ± 10 *дб* более. Зависимости интенсивности (спектральной плотности) от частоты я усредненных с 50%-й вероятностью значений оказываются в этом ыте, как и ранее, пропорциональными $F^{-1,5}$ для $d = 2$ и F^{-2}— $F^{-2,5}$ я $d = 10$ *м*.

Аналогичное статистическое усреднение более 600 текущих спектров, ределенных в интервале более низких частот 0,03—0,42 *гц* при полосе $_a = 0{,}006$ *гц*, иллюстрируется рис. 6. В отличие от данных рис. 5, ответствующих измерениям в течение одного опыта при практически изменных условиях, в этом случае усреднялись результаты исследова й, проведенных в течение длительного периода при самых различных теорологических условиях.

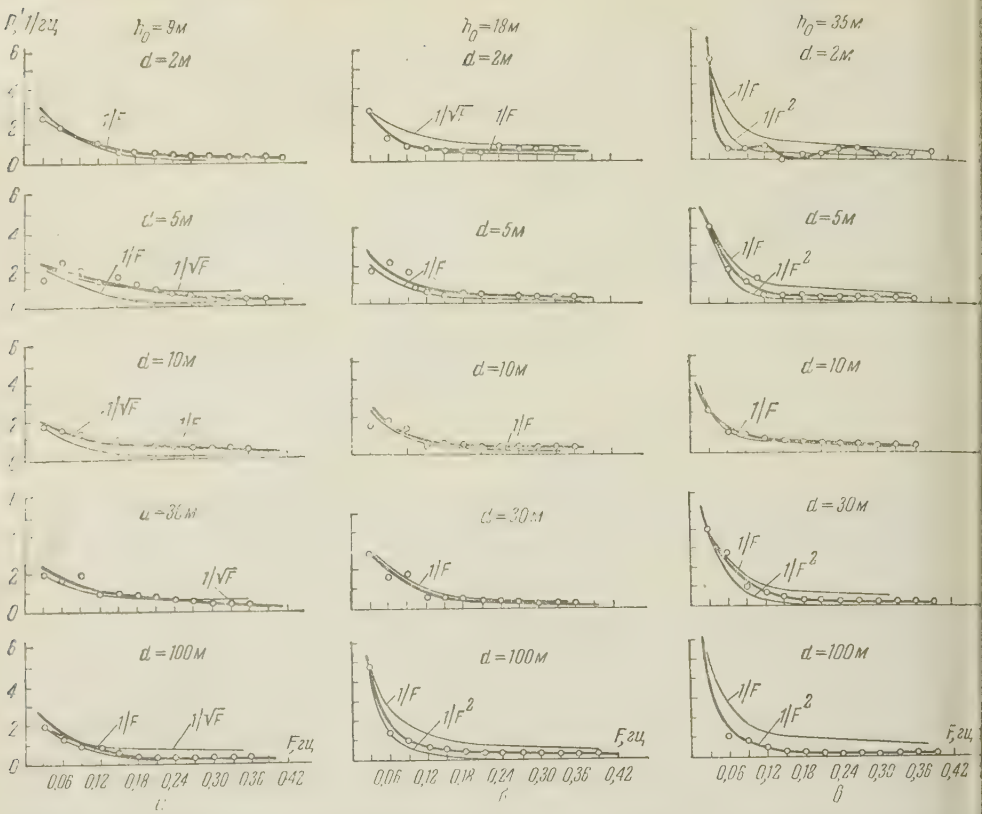


Рис. 6. Статистические зависимости спектральной плотности от частоты при различны h_0 и d

Корреляция в пространстве при таком воспроизведении спектр флуктуаций соответствовала расстояниям $l = 10$—30 *м*. Как следует и рис. 6, через статистически определенные значения спектральной плот ности с $W = 50\%$ во всех случаях могут быть проведены со сравнитель но небольшим разбросом усредненные зависимости $p'(F)$, изменяющиеся (в зависимости от величины базы) от $p \sim F^{-0,5} - F^{-1}$ при $h_0 = 9$ *м* до $p' \sim F^{-1,5} - F^{-2}$ при $h_0 = 35$ *м*. Характерно, что на всех графиках рис. 6 вплоть до частот порядка 0,01 *гц* продолжается увеличение спектральной плотности с понижением частоты, хотя и медленнее, чем в более высоко частотном интервале (рис. 5). Таким образом, статистическая обработка спектров нестационарных флуктуаций позволяет определить для раз личных d и h_0 основные тенденции спектральных характеристик $\overline{p}(F)$. Следует, однако, отметить, что в ряде случаев затруднительно использовать этот метод, например при анализе причин, вызывающих изменения вре менны́х характеристик флуктуаций, что представляет, вообще говоря, существенный интерес. Учитывая непостоянство от опыта к опыту теку щих спектров, в этих измерениях представлялось целесообразным опре делить их связь с изменениями метеорологических условий на трассе. С этой целью регулярно проводились измерения давления, температуры ветра, влажности и т. п. в четырех разнесенных пунктах, два из которых располагались на концах радиотрассы.

В частности, делалась попытка определить зависимость спектральных характеристик от направления и силы ветра, поскольку в рамках ши роко известной гипотезы «замерзшей турбулентности» [1, 6] временны́е (спектральные) зависимости обусловливаются лишь процессом переноса

неоднородностей средним ветром, причем в этом случае должно иметь место существенное влияние на спектры лишь «поперечной» составляющей ветра, направленной перпендикулярно радиотрассе.

В результате проведенного сопоставления можно отметить, что явной связи спектров флуктуаций усредненными метеорологическими условиями (в частности с направлением и силой ветра) практически обнаружить не удалось. При определении текущих спектров подобное сопоставление, однако, могло быть выполнено лишь качественно, что наряду со сложностью и трудоемкостью приведенной методики, как указывалось, существенно ограничивает ее возможности. В подобных случаях могут оказаться целесообразными иные, численные оценки спектральных характеристик флуктуаций, полученные приближенно, не прибегая к подробному исследованию зависимости спектральной плотности от частоты. Этот вопрос, однако, выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Красильников, Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз., 1949, **13**, 1, 33
2. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1953, **17**, 2, 155.
3. Л. А. Чернов, Докл. АН СССР, 1954, **98**, 6, 953; Акуст. ж., 1957, **3**, 2, 192.
4. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд. АН СССР, 1958.
5. В. Н. Каравайников, Акуст. ж., 1958, **3**, 2, 165.
6. R. B. Muchmore, A. D. Wheelon, Proc. I. R. E., 1955, 43, 10, 1437.
7. А. В. Мень, С. Я. Брауде, В. И. Горбач, Доповіді АН УРСР, 1959, **3**, 7, 740.
8. А. В. Мень, В. И. Горбач, С. Я. Брауде, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 3, 388.
9. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Докл. АН СССР. 1959, **127**, 4, 792.
10. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 4, 553.
11. A. P. Deam, B. M. Fannin, Proc. I. R. E., 1955, 43, 10, 1402.
12. J. W. Herbstreit, M. C. Thompson, Proc. I. R. E., 1955, 43, 10, 1391.
13. А. В. Мень, С. Я. Брауде, В. И. Горбач, Докл. АН СССР, 1959, **125**, 5, 1019.
14. А. В. Мень, С. Я. Брауде, В. И. Горбач, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 6, 848.
15. M. C. Thompson, H. B. Janes, J. Res. Nat. Bur. Standards, 1959, **63D**, 4, 45.
16. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, ГТТИ, 1953.
17. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд. Советское радио, 1951.
18. А. В. Мень, Изв. вузов МВР СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 3, 395.

Поступила в редакцию
16 XI 1960

1961 № 10

ЧАСТОТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУД И ФАЗ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОСТРОНАПРАВЛЕННОЙ АНТЕННЫ

М. Ф. Бахарева

С учетом конечных размеров приемного устройства вычислены коэффициенты частотной корреляции флуктуаций амплитуд R_A^Σ и фаз R_φ^Σ электромагнитного поля первоначально плоской волны, прошедшей слой толщины L в среде со случайными крупномасштабными неоднородностями показателя преломления. Построены графики зависимостей R_A^Σ и R_φ^Σ от сдвига частот δ, волнового параметра $D = \frac{4L}{ka^2}$ (L — толщина слоя, k — волновое число, a — средний размер неоднородностей среды) и от относительного размера приемной антенны h/a.

ВВЕДЕНИЕ

Вычислению корреляционных функций флуктуаций амплитуд и фаз плоской волны, прошедшей статистически неоднородный слой, посвящен ряд исследований [1—3].

В работе [3] найден коэффициент частотной корреляции флуктуаций амплитуд R_A и фаз R_φ в зависимости от D и δ в точке, т. е. для бесконечно малых размеров приемного устройства.

В данной работе получены выражения для коэффициентов частотной корреляции флуктуаций амплитуд R_A^Σ и фаз R_φ^Σ в тракте остронаправленной антенны (линзы) в зависимости от D, δ и относительного размера антенны. При этом предварительно вычислены частотно-поперечные корреляционные функции флуктуаций амплитуд и фаз, т. е. корреляции в двух точках, перпендикулярных распространению, и, соответственно, для двух различных частот, поскольку от этих функций зависит частотная корреляция в фокусе линзы. При выводе формул для R_A^Σ и R_φ^Σ предположено, что флуктуации поля малы, а антенна имеет форму квадрата со стороной h.

В частном случае $h/a = 0$ полученные формулы переходят в найденные ранее в [3].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Считая, что две плоские монохроматические волны с частотами ω_1 и ω_2 проходят в направлении ox статистически неоднородный слой толщины L, а приемная линза расположена в плоскости $x = L$ (рис. 1), вычислим коэффициенты частотной корреляции флуктуаций амплитуд R_A^Σ и фаз R_φ^Σ в фокусе линзы, а именно

$$R_A^\Sigma = \frac{\overline{\Delta A_1^\Sigma \Delta A_2^\Sigma}}{\sqrt{\overline{(\Delta A_1^\Sigma)^2}\ \overline{(\Delta A_2^\Sigma)^2}}}, \qquad R_\varphi^\Sigma = \frac{\overline{\Delta\varphi_1^\Sigma\ \Delta\varphi_2^\Sigma}}{\sqrt{\overline{(\Delta\varphi_1^\Sigma)^2}\ \overline{(\Delta\varphi_2^\Sigma)^2}}}, \tag{1}$$

где ΔA_i^Σ и $\Delta\varphi_i^\Sigma$ — соответственно флуктуации амплитуды и фазы в фокусе линзы на частоте ω_i.

Вычисление R_A^Σ и R_φ^Σ проведем для малых возмущений поля обеих волн. В этом случае, как показано в [4], можно считать, что флуктуации амплитуды и фазы в фокусе вызваны соответственно флуктуациями амплитуды и фазы в падающей на линзу волне. На этом основании величины ΔA_i^Σ и $\Delta\varphi_i^\Sigma$ можно записать в виде

$$\Delta A_i^\Sigma = \frac{1}{\lambda_i F}\int\limits_\Sigma \Delta A_i(s)\,ds = \frac{\overline{A}}{A_0}\frac{1}{\Sigma}\int\limits_\Sigma \Delta A_i(s)\,ds; \quad \Delta\varphi_i^\Sigma = \frac{1}{\Sigma}\int\limits_\Sigma \Delta\varphi_i(s)\,ds, \tag{2}$$

где F — фокусное расстояние; $\overline{A}$ — среднее значение амплитуды поля в фокусе; A_0 — амплитуда падающей волны; Σ — площадь линзы; $\Delta A_i(s)$ [$\Delta\varphi_i(s)$] — флуктуации амплитуды (фазы) в точке s на частоте ω_i $(i = 1, 2)$.

Подставляя (2) в (1) и усредняя, находим

$$R_A^\Sigma = \frac{\iint\limits_{\Sigma\Sigma'} \overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}\,ds\,ds'}{\sqrt{\iint\limits_{\Sigma\Sigma'} \overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_1(s')}\,ds\,ds' \iint\limits_{\Sigma\Sigma'} \overline{\Delta A_2(s)\,\Delta A_2(s')}\,ds\,ds'}}, \tag{3}$$

$$R_\varphi^\Sigma = \frac{\iint\limits_{\Sigma\Sigma'} \overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s)}\,ds\,ds'}{\sqrt{\iint\limits_{\Sigma\Sigma'} \overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_1(s')}\,ds\,ds' \iint\limits_{\Sigma\Sigma'} \overline{\Delta\varphi_2(s)\,\Delta\varphi_2(s')}\,ds\,ds'}}.$$

Поперечные функции корреляций $\overline{\Delta A_i(s)\,\Delta A_i(s')}$ и $\overline{\Delta\varphi_i(s)\,\Delta\varphi_i(s')}$ $(i = 1, 2)$, входящие в подынтегральное выражение знаменателя (3), вычислены в [1]. В интегралы числителя (3) входят кроме того функции $\overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}$ и $\overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s')}$, которые мы назовем частотно-поперечными корреляционными функциями флуктуаций соответственно амплитуд и фаз. Вычислению этих функций посвящен следующий параграф работы.

2. ЧАСТОТНО-ПОПЕРЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУД И ФАЗ

Используя результаты работы [5] (гл. V, формулы (72) и (71)) и обозначения рис. 1, запишем выражения для малых флуктуаций амплитуды и фазы в двух точках s и s' с координатами $(L, 0, 0)$ и $(L, l, 0)$ в виде интегралов по рассеивающему слою объема V:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\Delta A_i(s)}{A_0}\\ \Delta\varphi_i(s)\end{matrix}\right\} = \frac{k_i^2}{2\pi}\int\limits_V \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} k_i[r - (L - \xi)]\,\frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\Delta A_i(s')}{A_0}\\ \Delta\varphi_i(s')\end{matrix}\right\} = \frac{k_i^2}{2\pi}\int\limits_V \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} k_i[r_l - (L - \xi)]\,\frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r_l}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{4}$$

где A_0 — амплитуда падающих на слой волн (одинаковая для обеих частот); k_i — волновое число на частоте ω_i $(i = 1, 2)$; $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — флуктуация показателя преломления в точке (ξ, η, ζ); $r = \sqrt{(L - \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$-

$r_l = \sqrt{(L-\xi)^2 + (l-\eta)^2 + \zeta^2}$ — расстояния между точками s, s' точкой с координатами (ξ, η, ζ) внутри рассеивающего объема.

Перемножая значения $\frac{\Delta A_i}{A_0}(\Delta\varphi_i)$ для разных частот и в разных точках усредняя и производя выкладки, аналогичные использованным при вы

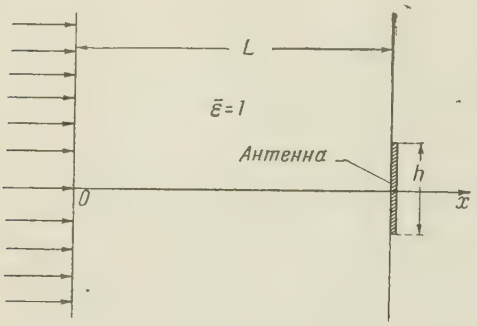


Рис. 1. Схема расположения приемно антенны

числении поперечной корреляции флуктуаций амплитуд и фаз [1], на ос новании (4) находим

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\dfrac{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}{A_0^2}} \\ \overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s')}\end{array}\right\} = \frac{1}{2}\overline{\mu^2}k_1k_2\,(J_1 \mp J_2), \tag{5}$$

где

$$J_{1,2} = \frac{1}{2i}\int_0^L dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{a^2}\right)\left\{\frac{\exp\left[\dfrac{i\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(x,\,\xi)-i}\right]}{b_{1,2}(x,\,\xi)-i} - \frac{\exp\left[-\dfrac{i\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(x,\,\xi)+i}\right]}{b_{1,2}(x,\,\xi)+i}\right\} d\xi \tag{6}$$

и где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} b_1(x,\,\xi) &= \frac{2(L-x)}{a^2}\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right) - \frac{\xi}{a^2}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right), \\ b_2(x,\,\xi) &= \frac{2(L-x)}{a^2}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right) - \frac{\xi}{a^2}\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

$$j = \sqrt{-1}.$$

При получении (5) предположено, что флуктуации показателя пре ломления распределены нормально, т. е.

$$\overline{\mu(\xi,\,\eta,\,\zeta)\,\mu(\xi',\,\eta',\,\zeta')} = \overline{\mu^2}\exp\left[-\frac{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}}{a^2}\right],$$

где $\overline{\mu^2}$ и a — соответственно интенсивность и средний размер этих флук туаций; $k_i a \gg 1$ $(i = 1, 2)$ и $L \gg a$.

Делая в первом слагаемом подынтегрального выражения (6) замену $z = \dfrac{i\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(x,\,\xi)-i}$, а во втором — замену $z = \dfrac{-i\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(x,\,\xi)+i}$, после интег

рирования по x получаем

$$J_{1,2} = \frac{a^2}{4j\left(\frac{1}{k_1} \mp \frac{1}{k^2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{a^2}\right) \left\{ \mathrm{Ei}\left[\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(L,\xi) - j}\right] - \right.$$

$$\left. - \mathrm{Ei}\left[-\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(L,\xi) + j}\right] - \mathrm{Ei}\left[\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(0,\xi) - j}\right] + \mathrm{Ei}\left[-\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(0,\xi) + j}\right] \right\} d\xi, \quad (8)$$

где Ei — интегральная показательная функция.

Обозначим

$${}^1\varepsilon_{1,2} = \frac{j\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(L,\xi) - j}, \qquad {}^2\varepsilon_{1,2} = \frac{j\frac{l^2}{a^2}}{b_{1,2}(L,\xi) + j}.$$

Согласно (7) и при условии $k_i a \gg 1$ выполняются неравенства $|b_{1,2}(L,\xi)| \ll 1$. Разложим поэтому разности $\{\mathrm{Ei}({}^1\varepsilon_{1,2}) - \mathrm{Ei}({}^2\varepsilon_{1,2})\}$, входящие под знак интегралов (8), по степеням малых приращений аргумента:

$$\Delta\varepsilon_{1,2} = {}^2\varepsilon_{1,2} - {}^1\varepsilon_{1,2} = -\frac{2j\frac{l^2}{a^2} b_{1,2}(L,\xi)}{1 + b_{1,2}^2(L,\xi)}.$$

В результате с точностью до $b_{1,2}^3$ получаем

$$\mathrm{Ei}({}^2\varepsilon_{1,2}) - \mathrm{Ei}({}^1\varepsilon_{1,2}) = 2jb_{1,2}(L,\xi) \exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{b_{1,2}^2(L,\xi)}{3}\right]\left(1 - 2\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{l^4}{a^4}\right)\Big]. \quad (9)$$

Подставляя это разложение в (8), отбрасывая интегралы от нечетных функций ξ и используя обозначения

$$k_1 = \frac{\omega}{c}(1 - \delta), \quad k_2 = \frac{\omega}{c}(1 + \delta), \quad D = \frac{4cL}{\omega a^2},$$

находим, что

$$J_1 = \frac{a^2\omega(1-\delta^2)}{8jc\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{a^2}\right) \left\{ \mathrm{Ei}\left[-\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{b_1(0,\xi) + j}\right] - \right.$$

$$\left. - \mathrm{Ei}\left[\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{b_1(0,\xi) - j}\right] \right\} d\xi, \quad (10)$$

$$J_2' = \frac{\sqrt{\pi}a^3\omega(1-\delta^2)}{8jc}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D}{1-\delta^2} + j}\right) - \mathrm{Ei}\left(\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D}{1-\delta^2} - j}\right)\right]. \quad (11)$$

При выводе соотношения (11) в выражении $b_2(0,\xi)$ сделано пренебрежение вторым слагаемым на том основании, что $k_i a \gg 1$, а ξ практически не превышает a из-за быстрого спадания функции $\exp(-\xi^2/a^2)$, входящей под знак интеграла (8).

Интегрирование в (10) выполним в двух частных случаях: 1) $D\delta/(1-\delta^2) \ll 1$ и 2) $D\delta/(1-\delta^2) \gg 1$. Для того чтобы требование малости флуктуаций поля во втором случае не нарушалось, допустим, что интенсивность флуктуаций показателя преломления $\overline{\mu^2}$ настолько

мала, что возмущения поля остаются малыми и на расстояниях, опре деляемых требованием $D\delta/(1-\delta^2) \gg 1$.

1) $D\delta/(1-\delta^2) \ll 1$. В этом случае на основании (7) и при услови $k_1 a \gg 1$ выполняется неравенство

$$b_1(0, \xi) = \frac{D\delta}{1-\delta^2}\left(1 - \frac{\xi}{2L\delta}\right) = \frac{1}{1-\delta^2}\left(D\delta - \frac{2c\xi}{\omega a^2}\right) \ll 1.$$

Поэтому для разности интегральных показательных функций в (10) можн воспользоваться разложением вида (9). После интегрирования (10) по находим

$$J_1 = \sqrt{\pi} aL \exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right)\left\{1 - \left(1 - 2\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{l^4}{a^4}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{1}{3}\frac{D^2\delta^2}{(1-\delta^2)^2} + \frac{2c^2}{\omega^2 a^2}\frac{1}{(1-\delta^2)^2}\right]\right\}. \qquad (12$$

Подставляя (11) и (12) в (5), получаем следующие выражения дл частотно-поперечных корреляционных функций флуктуаций амплитуд фаз:

$$\left.\frac{\overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}}{A_0^2}\right\} = \frac{1}{2}\overline{\mu^2}\sqrt{\pi} aL(1-\delta^2)\frac{\omega^2}{c^2}\times$$
$$\left.\overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s')}\right.$$
$$\times 8\left\{\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right)\left(1 - 2\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{l^4}{a^4}\right)\left[\frac{1}{3}\frac{D^2\delta^2}{(1-\delta^2)^2} + \frac{2c^2}{\omega^2 a^2}\frac{1}{(1-\delta^2)^2}\right] \pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{1-\delta^2}{2jD}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D}{1-\delta^2}+j}\right) - \mathrm{Ei}\left(\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D}{1-\delta^2}-j}\right)\right]\right\}.$$

Если выполнено условие $D/(1-\delta^2) \ll 1$, более сильное, чем услови $D\delta/(1-\delta^2) \ll 1$, то, разлагая разность функций Ei по формуле (9) находим

$$\frac{\overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}}{A_0^2} = \frac{8}{3}\overline{\mu^2}\sqrt{\pi}\left(\frac{L}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right)\left(1 - 2\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{l^4}{a^4}\right)\times$$
$$\times\left[1 - \frac{3}{8}\frac{1}{\left(\frac{L}{a}\right)^2}\frac{1}{1-\delta^2}\right],$$
$$\overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s')} = \overline{\mu^2}\sqrt{\pi} aL\frac{\omega^2}{c^2}\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right)(1-\delta^2). \qquad (13$$

2) $D\delta/(1-\delta^2) \gg 1$. Из этого условия и (7) следует, что для крупно масштабных неоднородностей ($ka \gg 1$)

$$b_1(0, \xi) = \frac{1}{1-\delta^2}\left(D\delta - \frac{2c\xi}{\omega a^2}\right) \simeq \frac{D\delta}{1-\delta^2}.$$

Если подставить это значение $b_1(0, \xi)$ в (10), то интегрирование по дает

$$J_1 = \frac{\sqrt{\pi} a^3\omega}{8cj}\frac{1-\delta^2}{\delta}\left\{\mathrm{Ei}\left[-\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D}{1-\delta^2}+j}\right] - \mathrm{Ei}\left[\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D\delta}{1-\delta^2}-j}\right]\right\}.$$

Подставим J_2, определяемое формулой (11), и найденное выражение для J_1 в (5). В результате получаем

$$\left.\begin{matrix}\overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}\\ \hline A_0^2\\ \hline \overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s')}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2j}\sqrt{\pi\mu^2}\left(\frac{a\omega}{2c}\right)^3(1-\delta^2)^2\left\{\frac{1}{\delta}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D\delta}{1-\delta^2}+j}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{Ei}\left(\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D\delta}{1-\delta^2}-j}\right)\right]\pm\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D}{1-\delta^2}+j}\right)-\mathrm{Ei}\left(\frac{j\frac{l^2}{a^2}}{\frac{D}{1-\delta^2}-j}\right)\right]\right\}. \qquad (14)$$

В рассматриваемом случае можно пренебречь в аргументах функций Ei слагаемым j по сравнению с $D\delta/(1-\delta^2)$ (а значит и подавно — по сравнению с $D/(1-\delta^2)$).

Если воспользоваться далее формулой $\mathrm{Ei}(-jx) - \overline{\mathrm{Ei}(jx)} = 2j\frac{\pi}{2} - 2j\,\mathrm{Si}\,x$ и положить $\mathrm{Si}\,x \simeq x$ для $x \ll 1$, то (14) принимает простой вид:

$$\left.\begin{matrix}\overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}\\ \hline A_0^2\\ \hline \overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s')}\end{matrix}\right\} = j\sqrt{\pi}\left(\frac{a\omega}{2c}\right)^3\mu^2(1-\delta^2)^2\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\delta}\mp 1\right)-\frac{l^2}{a^2}\frac{(1-\delta^2)(1\mp\delta^2)}{D\delta^2}\right]. \qquad (15)$$

Отметим, что условие $x \ll 1$, т. е. $\frac{l^2}{a^2}\frac{1-\delta^2}{D} \ll 1$, при котором получено выражение (15), означает, что относительные размеры приемной антенны h/a ограничены требованием $h^2/a^2 \ll D/(1-\delta^2)$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУД И ФАЗ В ФОКУСЕ ЛИНЗЫ

Для получения коэффициентов частотной корреляции в фокусе линзы, определяемых формулами (3), необходимо проинтегрировать найденные в предыдущем параграфе выражения для частотно-поперечных корреляционных функций по площади линзы. Это интегрирование мы проведем в частных случаях $D/(1-\delta^2) \ll 1$ и $D\delta/(1-\delta^2) \gg 1$, когда частотно-поперечные корреляционные функции флуктуаций амплитуд и фаз выражаются формулами (13) и (15). При этом будем предполагать, что линза квадратная со стороной h (рис. 1).

1) $D/(1-\delta^2) \ll 1$. При этом условии для $\overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}$ и $\overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s')}$ справедливы формулы (13).

Используя (13) и (3), легко получаем следующие выражения для коэффициентов частотной корреляции:

$$R_A^{\Sigma} = 1 - \frac{\frac{3}{8}\frac{1}{\left(\frac{L}{a}\right)^2}\frac{1}{1-\delta^2}}{1-\frac{3}{8}\frac{1}{\left(\frac{L}{a}\right)^2}}, \qquad R_{\varphi}^{\Sigma} = \qquad (16)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае коэффициенты корреляции в фокусе линзы не зависят от размера фокусирующего устройства, а флуктуации фаз полностью коррелированы. Формулы (16) совпадают с полученными в [3] выражениями для частотной корреляции флуктуаций амплитуд и фаз в точке, если в последних положить $D/(1-\delta^2) \ll 1$.

2) $D\delta/(1-\delta^2) \gg 1$. В этом случае значения $\overline{\Delta A_1(s)\,\Delta A_2(s')}$ $\overline{\Delta\varphi_1(s)\,\Delta\varphi_2(s')}$ определяются формулами (15). Переходить в них к пред лу $\delta = 0$ для вычисления знаменателей коэффициентов корреляции (нельзя, так как они получены при условии $D\delta/(1-\delta^2) \gg 1$. Поэтом

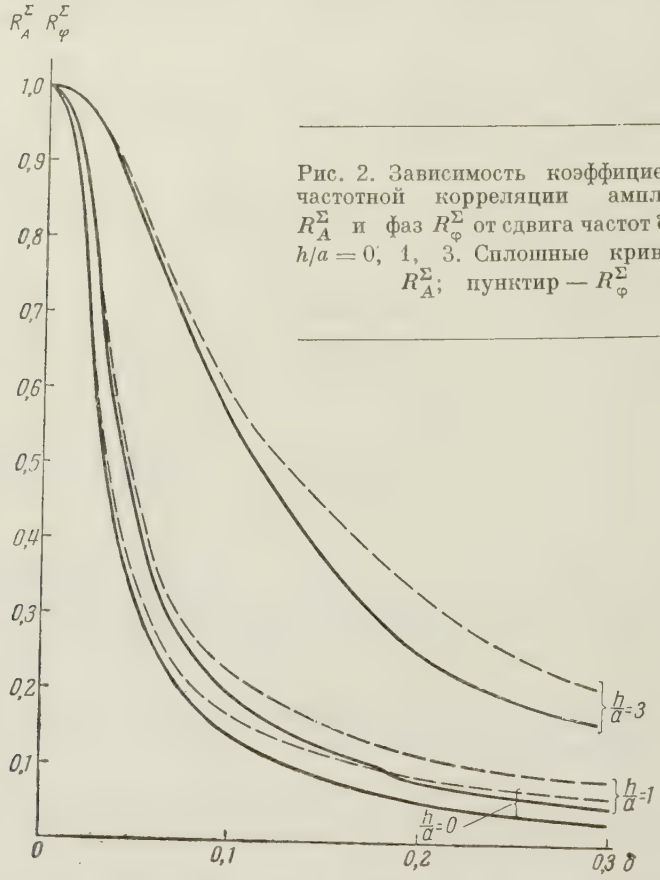


Рис. 2. Зависимость коэффициентов частотной корреляции амплитуд R_A^Σ и фаз R_φ^Σ от сдвига частот δ для $h/a = 0,\ 1,\ 3$. Сплошные кривые— R_A^Σ; пунктир — R_φ^Σ

мы воспользуемся формулами (228) и (229) работы [5] для поперечно корреляции амплитуд и фаз, а именно:

$$\left.\frac{\overline{\Delta A_i(s)\,\Delta A_i(s')}}{A_0^2}\right\} = \frac{1}{2}\,\overline{\mu^2}\sqrt{\pi}aL\,\frac{\omega_i^2}{c^2}\left[\exp\left(-\frac{l^2}{a^2}\right) \mp \frac{\pi}{2D_i} \pm \frac{l^2}{a^2}\,\frac{1}{D_i^2}\right],$$

$$\left.\overline{\Delta\varphi_i(s)\,\Delta\varphi_i(s')}\right\}$$

$$D_i = \frac{4cL}{\omega_i a^2}. \tag{17}$$

Интегрируя (15) и (17) по площади линзы и подставляя результа в (3), находим

$$\left.\begin{matrix} R_A^\Sigma \\ R_\varphi^\Sigma \end{matrix}\right\} = \frac{(1-\delta^2)\left[\frac{\pi}{2D}\left(\frac{1}{\delta} \mp 1\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{(1-\delta^2)(1 \mp \delta^2)}{D^2\delta^2}\right]}{\left[\frac{Q_0\left(\frac{h}{a}\right)}{h^4} \mp \frac{\pi}{2D}(1-\delta) \pm \frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{(1-\delta)^2}{D^2}\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[\frac{Q_0\left(\frac{h}{a}\right)}{h^4} \mp \frac{\pi}{D}(1+\delta) \pm \frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{(1+\delta)^2}{D^2}\right]^{1/2}}, \tag{18}$$

где введено обозначение $Q_0\left(\frac{h}{a}\right)=\left[\frac{h}{a}\Phi\left(\frac{h}{a}\right)+\frac{\exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right)-1}{\sqrt{\pi}}\right]^2\pi a^4$, Φ — интеграл вероятности.

Как видно из формул (18), коэффициенты частотной корреляции в фокусе линзы зависят от размера приемного устройства h/a.

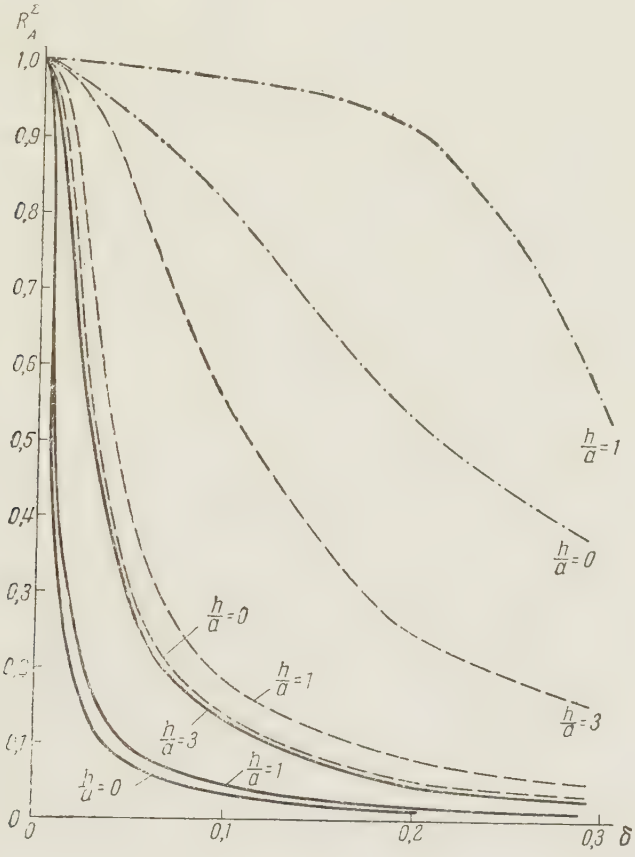


Рис. 3. Зависимость коэффициента частотной корреляции флуктуаций амплитуды R_A^Σ от сдвига частот δ для $h/a=0$, 1, 3; D=500 (сплошные кривые); $D=100$ (пунктир); $D=10$ (штрих-пунктир)

В предельном случае, когда $h/a\to 0$, формулы (18) переходят в полученные в [3] выражения для частотной корреляции в точке, если в последних положить $D\delta/(1-\delta^2)\gg 1$, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{h\to 0}R_A^\Sigma&=R_A\\ \lim_{h\to 0}R_\varphi^\Sigma&=R_\varphi\end{aligned}\right\}=\frac{(1-\delta^2)\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\delta}\mp 1\right)}{\sqrt{\left[D\mp\frac{\pi}{2}(1-\delta)\right]\left[D\mp\frac{\pi}{2}(1+\delta)\right]}}.$$

На рис. 2 приведены графики зависимостей коэффициентов частотной корреляции флуктуаций амплитуд R_A^Σ и фаз R_φ^Σ в фокусе линзы от сдвига частот δ, построенные по формулам (18) для относительного размера линзы $h/a=0$; 1 и 3 и при волновом параметре $D=100$. Как видно из ри-

сунка, при одних и тех же D, h/a и δ флуктуации фазы несколько более коррелированы, чем флуктуации амплитуды.

На рис. 3 изображена зависимость корреляции флуктуаций амплитуд R_A^{Σ} от δ для $h/a = 0, 1, 3$, $D = 500, 100, 10$.

Из кривых рис. 2 и 3 следует, что с увеличением размера антенны или, что то же самое, с уменьшением рассеивающего объема (поскольку он ограничен диаграммой направленности приемного устройства) корреляция амплитуд и фаз в фокусе растет. В то же время уменьшается частотная, поперечная корреляция в плоскости антенны, поскольку увеличивается расстояние между краями антенны. Это согласуется с результатами работы [6], в которой показано, что раскоррелирование флуктуаций поля в плоскости раскрыва антенны при увеличении размеров антенны сопровождается уменьшением рассеивающего объема.

Увеличение R_A^{Σ} и R_{φ}^{Σ} с ростом h/a означает также, что абсолютные интенсивности флуктуаций $\sqrt{\overline{(\Delta A_1^{\Sigma})^2}\,\overline{(\Delta A_2^{\Sigma})^2}}$ и $\sqrt{\overline{(\Delta\varphi_1^{\Sigma})^2}\,\overline{(\Delta\varphi_2^{\Sigma})^2}}$ в фокусе линзы с ростом h/a увеличиваются медленнее, чем корреляционные функции $\overline{\Delta A_1^{\Sigma}\Delta A_2^{\Sigma}}$ и $\overline{\Delta\varphi_1^{\Sigma}\Delta\varphi_2^{\Sigma}}$.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность С. М. Рытову за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 1955, 1, 1, 89
2. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 1956, 2, 2, 211.
3. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 1, 88.
4. В. А. Красильников, В. И. Татарский, Докл. АН СССР (новая серия), 1953, 38, 3, 435.
5. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд. АН СССР, 1958.
6. М. Ф. Бахарева, Б. Е. Кинбер, Электросвязь, 1960, 5, 67.

Поступила в редакцию
28 XII 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 10

ВЛИЯНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СТЕНКИ НА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЛОЙ ГИРОТРОПНОЙ СФЕРЫ

Сюй Янь-шэн

Методом зеркального отображения рассмотрено влияние металлической стенки на магнитостатические колебания малой гиротропной сферы. Показано, что влияние стенки приводит к связи между различными типами колебаний и вносит поправки к резонансным условиям. Получены правила отбора взаимодействующих типов колебаний для случаев параллельного и перпендикулярного подмагничивания. Вычислены поправки к резонансным условиям для типов колебаний (1, —1) (2, —2) и (2, —1).

ВВЕДЕНИЕ

Под магнитостатическими колебаниями мы понимаем собственные колебания малой гиротропной сферы, которые при уменьшении ее размеров переходят в колебания, исследованные Уокером [1], использовавшим при решении задачи магнитостатическое приближение. Такие колебания рассмотрены в работах [2, 3, 4] в предположении, что сфера находится далеко от металлических стенок волновода или резонатора и их влиянием можно пренебречь. Влияние близости металлической стенки волновода на резонансное условие однородной прецессии учтено в работе [5]. Однако предложенный в ней метод сложен и не получены результаты для других типов магнитостатических колебаний. В данной работе при помощи метода зеркального отображения рассмотрены магнитостатические колебания малой гиротропной сферы, находящейся вблизи плоской металлической стенки с бесконечной проводимостью.

1. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СТЕНКИ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В статьях [2, 3] показано, что при возбуждении магнитостатических колебаний малой гиротропной сферы падающие и отраженные волны удобно выражать через потенциалы Дебая, соответствующие поперечно-магнитным и поперечно-электрическим сферическим волнам. Влияние металлической стенки можно учесть при помощи зеркального отображения сферы за металлической поверхностью. Поля, создаваемые этой сферой, описываются добавочными потенциалами Дебая.

Рассмотрим два случая.

1. Случай перпендикулярного подмагничивания: ось z (т. е. направление постоянного подмагничивающего поля) перпендикулярна металлической стенке (см. рис. 1).

Положим, что центр сферы совпадает с начальной точкой координат O. Расстояние от O до стенки равно b. От сферы отражаются сферические волны, описываемые потенциалами Дебая u и v. Влияние стенки можно заменить сферическими волнами, характеризующимися добавочными потенциалами Дебая u' и v' с начальной точкой O'.

Если поля сферы описываются потенциалами

$$v = A_{n,m} h_n^{(2)}(k_0 r)\, P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi},$$
$$u = B_{n,m} h_n^{(2)}(k_0 r)\, P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \qquad (1)$$

то поля ее зеркального отображения описываются потенциалами

$$\begin{aligned} v' &= A_{n,m} h_n^{(2)}(k_0 r')\, P_n^m(\cos\theta')\, e^{im\varphi'} \\ u' &= -B_{n,m} h_n^{(2)}(k_0 r')\, P_n^m(\cos\theta')\, e^{im\varphi'} \end{aligned} \quad \text{при } n-m \text{ четном}, \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} v' &= -A_{n,m} h_n^{(2)}(k_0 r')\, P_n^m(\cos\theta')\, e^{im\varphi'} \\ u' &= B_{n,m} h_n^{(2)}(k_0 r')\, P_n^m(\cos\theta')\, e^{im\varphi'} \end{aligned} \quad \text{при } n-m \text{ нечетном}, \tag{3}$$

где r, θ, φ и r', θ', φ' — сферические координаты, соответствующие начальным точкам O и O' соответственно; $k_0 = \omega/c$ — волновое число в пустоте.

В самом деле, замена металлической стенки зеркальным отображением сферы справедлива, если выполнены граничные условия $E_\lambda = 0$ и $H_r = 0$ на стенке.

Для TE-волны, описываемой потенциалом v, эти граничные условия выражаются следующими уравнениями на металлической стенке:

$$\begin{gathered} \frac{ik_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(rv) + \frac{ik_0}{r'}\frac{\partial}{\partial\theta'}(r'v') = 0, \\ -\frac{ik_0}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(rv)\cos\theta - \frac{ik_0}{r'\sin\theta'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}(r'v')\cos\theta' = 0, \\ \left[\frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} + k_0^2 rv\right]\cos\theta + \left[\frac{\partial^2(r'v')}{\partial r'^2} + k^2{}_0 r'v'\right]\cos\theta' = 0, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv)}{\partial r\,\partial\theta}\sin\theta + \frac{1}{r'}\frac{\partial^2(r'v')}{\partial r'\,\partial\theta'}\sin\theta' = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Очевидно, что на стенке

$$r = r', \quad \cos\theta = -\cos\theta', \quad \sin\theta = \sin\theta', \quad \varphi = \varphi' \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} P_n^m(\cos\theta') &= P_n^m(\cos\theta) \\ \frac{dP_n^m(\cos\theta')}{d\theta'} &= -\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad \text{при } n-m \text{ четном},$$

$$\begin{aligned} P_n^m(\cos\theta') &= -P_n^m(\cos\theta) \\ \frac{dP_n^m(\cos\theta')}{d\theta'} &= \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad \text{при } n-m \text{ нечетном}. \tag{6}$$

Учитывая знаки в выражениях (1)—(3), нетрудно убедиться в том, что условие (4) выполняется и наша замена справедлива для TE-волны.

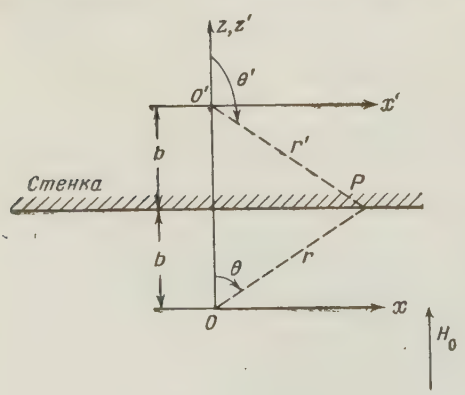


Рис. 1

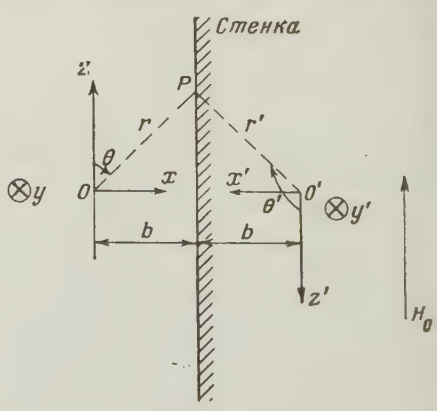


Рис. 2

Аналогично можно показать справедливость замены стенки зеркальным отображением сферы для TM-волны.

2. Случай параллельного подмагничивания: ось z и подмагничивающее поле направлены параллельно металлической стенке (см. рис. 2). В отличие от предыдущего случая, координаты x', z', связанные с зеркальным отображением сферы, направлены противоположно исходным x, z. Для таких систем координат нетрудно показать, что замена металлической стенки зеркальным отображением также справедлива. Приведенные выше правила выбора знаков и соотношения (5), (6) остаются справедливыми и в этом случае.

2. ФОРМУЛЫ СМЕЩЕНИЯ КООРДИНАТ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЕБАЯ

В предыдущем параграфе мы уже показали, что влияние металлической стенки эквивалентно добавочным сферическим волнам, соответствующим потенциалам Дебая u' и v'. Следовательно, чтобы учесть влияние стенки, надо найти формулы переноса координат для потенциалов Дебая. Вообще говоря, эта задача очень сложна. Однако гиротропная сфера и ее расстояние от стенки много меньше длины волны. При этом существует следующая связь между потенциалами Дебая и магнитостатическим и электростатическим потенциалами ψ'_H, ψ'_E [4]:

$$\psi'_H \simeq \frac{\partial}{\partial r'}(r'v'),$$

$$\psi'_E \simeq \frac{\partial}{\partial r'}(r'u').$$

В разложении потенциалов Дебая u' и v' в ряд по аргументу $(k_0 r')$ достаточно взять лишь первый член, и тогда задача нахождения формул смещения координат для потенциалов Дебая u' и v' сведется к задаче о нахождении смещения координат для магнитостатического потенциала ψ'_H и электростатического потенциала ψ'_E, удовлетворяющих уравнению Лапласа.

Для случая перпендикулярного подмагничивания начальная точка смещается по оси z' на расстояние $-2b$, т. е. имеет место следующее преобразование координат:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z' + 2b.$$

Известно [6], что справедливо следующее равенство:

$$\frac{P_n(\cos\theta')}{r'^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!}{s!}\frac{r^s}{(2b)^{n+s+1}}P_s(\cos\theta). \tag{7}$$

Если на обе части его воздействовать дифференциальным оператором $\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]$, где $\xi = x + iy$; $\eta = x - iy$, то получится равенство [7]

$$\frac{P_n^m(\cos\theta')\,e^{\pm im\varphi'}}{r'^{n+1}} = \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\sum_{s=2m}^{\infty}\frac{(n-m+s)!}{s!}\frac{r^{s-m}P_{s-m}^m(\cos\theta)\,e^{\pm im\varphi}}{(2b)^{n-m+s+1}}. \tag{8}$$

Для случая параллельного подмагничивания надо сначала сместить начальную точку по оси x' на расстояние $2b$, т. е. положить

$$x'' = x' - 2b, \qquad y'' = y', \qquad z'' = z'.$$

После этого нужно выполнить еще следующее преобразование:

$$x = -x'', \qquad y = y'', \qquad z = -z''$$

или в сферических координатах:

$$r = r'', \quad \theta + \theta'' = 180°, \qquad \varphi + \varphi'' = 180°.$$

Второе преобразование легко произвести, поэтому подробно рассмотрим лишь первое преобразование.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{2b\left[1 + \frac{x''}{b} + \frac{r''^2}{(2b)^2}\right]^{1/2}}. \tag{9}$$

Используя выражение [6]

$$(1 - 2h\mu + h^2)^{-1/2} = P_0(\mu) + P_1(\mu)\, h + P_2(\mu)\, h^2 + \ldots, \tag{10}$$

можно преобразовать (9) к виду

$$\frac{1}{r'} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-r'')^s}{(2b)^{s+1}} P_s(\sin\theta'' \cos\varphi''). \tag{11}$$

Из формулы сложения [6]

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\overline{\varphi - \varphi'}) =$$
$$= P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta') +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta')\cos m(\varphi - \varphi')$$

после подстановки

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0$$

следует

$$P_n(\sin\theta'\cos\varphi') = P_n(0)\, P_n(\cos\theta') +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(0)\, P_n^m(\cos\theta')\cos m\varphi'.$$

Воздействуя на выражение (11) дифференциальным оператором $\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m \pm \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}$, получим [6] нужную формулу преобразования

$$(-1)^{n-m}(n-m)!\, \frac{P_n^m(\cos\theta')}{2^m r'^{n+1}} \begin{Bmatrix}\cos m\varphi' \\ -i\sin m\varphi'\end{Bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi''}\right)^m \pm \left(\frac{\partial}{\partial\eta''}\right)^m\right]\frac{\partial^{n-m}}{\partial z''^{n-m}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-r'')^s}{(2b)^{s+1}}\left[P_s(0)\, P_s(\cos\theta'') +\right.$$
$$\left. + 2\sum_{p=1}^{s} \frac{(s-p)!}{(s+p)!} P_s^p(0)\, P_s^p(\cos\theta'')\cos p\varphi''\right]. \tag{12}$$

Правую часть уравнения (12) можно вычислить, используя следующие формулы (см. Приложение):

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\lambda \pm \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^\lambda\right][r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi] =$$
$$= \frac{(-1)^\lambda}{2^\lambda} \frac{(n+m)!}{(n+m-2\lambda-\theta)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-\lambda-k}^{m-\lambda}(\cos\theta) \begin{Bmatrix}\cos(m-\lambda)\varphi \\ i\sin(m-\lambda)\varphi\end{Bmatrix} +$$
$$+ \frac{1}{2^\lambda} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-\lambda-k}^{m+\lambda}(\cos\theta) \begin{Bmatrix}\cos(m+\lambda)\varphi \\ -i\sin(m+\lambda)\varphi\end{Bmatrix}$$

при $\lambda \leqslant m$, $k \leqslant n - m$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\lambda \pm \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^\lambda\right] [r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi] =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^\lambda} \frac{(n+m)!}{(n-m-k)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-\lambda-k}^{\lambda-m}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos(\lambda - m)\varphi \\ i\sin(m-\lambda)\varphi \end{Bmatrix} + \tag{13}$$

$$+ \frac{1}{2^\lambda} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} r^{n-\lambda-k} P_{n-\lambda-k}^{\lambda+m}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos(m+\lambda)\varphi \\ -i\sin(m+\lambda)\varphi \end{Bmatrix}$$

при $\lambda > m$.

3. ВЛИЯНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СТЕНКИ НА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЛОЙ ГИРОТРОПНОЙ СФЕРЫ

Из полученных формул видно, что влияние стенки приводит к двум явлениям: смещению резонансной частоты (или резонансного значения поля) и возникновению связи между типами колебаний, что напоминает влияние эффекта распространения волн в сфере [4]. В случае перпендикулярного подмагничивания возникает связь между типами колебаний лишь с одинаковым индексом m, а в случае параллельного подмагничивания — между типами колебаний с четными или нечетными суммами индексов $n + m$. Эта связь следует из того, что преобразование (8) дает лишь члены с одинаковым индексом m, а преобразование (12) — лишь члены с четными или нечетными суммами индексов $n + m$. Следовательно, должно наблюдаться взаимодействие между этими типами колебаний, например (1, —1) и (2,0) в случае подмагничивания, параллельного стенке*, когда их резонансные условия близки друг к другу (аналогично взаимодействие между типами (1,—1) и (3,—1) из-за эффекта распространения волн в сфере [8]).

Следует отметить, что вследствие связи между типами колебаний можно возбуждать колебания одного типа при помощи других связанных типов колебаний.

Существует также связь между электростатическим и магнитостатическим колебаниями, которая может быть учтена только более высоким порядком приближения при решении электромагнитной задачи. Она невелика и ее можно не учитывать при условиях $k_0 a \ll 1$ (где a — радиус сферы) и, следовательно, $k_0 b \ll 1$. Из выражений (8) и (12) видно также, что влияние стенки быстро убывает с увеличением расстояния сферы от стенки. Когда отношение b/a близко к единице, т. е. поверхность сферы почти соприкасается со стенкой, надо одновременно учесть взаимодействие между многими высшими типами колебаний; задача при этом становится очень сложной. Однако если отношение b/a больше 2, влияние высших типов колебаний уже невелико.

Отметим, что влияние стенок прямоугольного волновода или резонатора на магнитостатистические колебания малой гиротропной сферы может быть учтено суммированием влияний всех стенок.

В качестве примера рассмотрим смещение резонансной частоты (или резонансного значения подмагничивающего поля) для типов колебаний (1,— 1) и (2, —2) в случае подмагничивания, параллельного стенке. Вычисление показывает, что в первом приближении можно учесть лишь влияние исходных типов колебаний, т. е. типов (1, —1) и (2, —2) соответственно.

---

* Такое взаимодействие экспериментально наблюдалось А. А. Тулайковой.

Сначала рассмотрим однородную прецессию (1, —1). Предположим, что отраженная от сферы волна имеет потенциал Дебая

$$v_s = C_1 h_1^{(2)}(k_0 r)\, P_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi} \simeq \frac{iC_1}{(k_0 r)^2} P_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi}$$

при $k_0 r \ll 1$. Из добавочного потенциала Дебая v_s' выделяется магнитостатический потенциал типа (1, —1)

$$\psi_s' = -\frac{iC_1}{k_0^2}\frac{3r}{16b^3} P_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi}.$$

Внутри феррита на поверхности сферы магнитостатический потенциал и нормальная составляющая индукции имеют вид

$$\psi = A_1 P_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi}$$
$$B_r = \frac{A_1}{a}(\mu - k) P_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi} \quad \text{при } r = a,$$

где μ и k — составляющие тензора магнитной проницаемости.

Из граничных условий (непрерывности потенциала и нормальной составляющей индукции B_r на поверхности сферы) следуют два уравнения. Приравнивая определитель этой системы нулю, получим резонансное условие

$$-\frac{1}{\mu - k - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2b}\right)^3 = \Delta_{1,-1}. \tag{14}$$

В работе [5] решена такая же задача и вычислена эффективная проницаемость $\mu_{эф}'$ для однородной прецессии с учетом потерь в феррите. Если приравнять вещественную часть знаменателя полученной там эффективной проницаемости $\mu_{эф}'$ нулю, то получим резонансное условие, одинаковое с выражением (14).

При $a/b \to 0$ $\Delta_{1,-1} \to 1/3$, что совпадает с известным результатом работы Уокера [1]. Слагаемое $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2b}\right)^3$ является поправкой к корню $\Delta_{1,-1}$ Уокера, учитывающей влияние металлической стенки на резонансное условие для сферы конечного радиуса a.

Аналогично можно вычислить резонансное условие для колебания типа (2, —2)

$$\Delta_{2,-2} = 0{,}4 + \frac{7}{4}\left(\frac{a}{2b}\right)^5. \tag{15}$$

В качестве другого примера рассмотрим случай возбуждения колебания типа (2, —1) однородной прецессией при перпендикулярном подмагничивании. Предположим, что отраженная от сферы волна описывается потенциалом Дебая

$$v_s = C_1 h_1^{(2)}(k_0 r)\, P_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi} + C_2 h_2^{(2)}(k_0 r)\, P_2^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi} \cong$$
$$\cong \frac{iC_1}{(k_0 r)^2} P_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi} + \frac{i3C_2 P_2^1(\cos\theta)}{(k_0 r)^3} e^{-i\varphi}$$

при $k_0 r \ll 1$.

Из добавочного потенциала Дебая v_s' выделяется магнитостатический потенциал

$$\psi_s' = \frac{-iC_1}{k_0^2}\left[\frac{rP_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi}}{(2b)^3} + \frac{r^2 P_2^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi}}{(2b)^4}\right] +$$
$$+ \frac{6iC_2}{k_0^3}\left[\frac{3rP_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi}}{(2b)^4} + \frac{4r^2 P_2^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi}}{(2b)^5}\right].$$

Внутри феррита на поверхности сферы потенциал имеет вид

$$\psi = A_1 P_1^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi} + A_2 P_2^1(\cos\theta)\, e^{-i\varphi}.$$

Граничные условия приводят к системе четырех уравнений. Приравняв ее определитель нулю, получим резонансные условия

$$\begin{aligned} \mu - k - 1 &\simeq -3 + 3\left(\frac{a}{2b}\right)^3, \\ \mu - k - 1 &\simeq -5 - 20\left(\frac{a}{2b}\right)^5. \end{aligned} \tag{16}$$

Первое условие соответствует резонансу типа (1, —1), второе — резонансу типа (2, —1). При $a/b \to 0$ эти выражения дают $\Delta_{1,-1} = 1/3$ и $\Delta_{2,-1} = 1/5$, что совпадает с [1]. Отношение A_1/A_2 определяет относительную амплитуду колебаний типов (1, —1) и (2, —1) в сфере.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Влияние металлической стенки приводит к смещению резонансной частоты (или резонансного значения подмагничивающего поля) и возникновению связи между различными типами колебаний. Это влияние быстро убывает с увеличением расстояния от сферы до стенки и практически им можно пренебречь при $b/a > 3$. Вычисление показывает, что связь существует между типами колебаний с одинаковым индексом m в случае подмагничивания, перпендикулярного стенке, и между типами колебаний с четными или нечетными суммами индексов $n + m$ в случае подмагничивания, параллельного стенке. Приведенные выше формулы позволяют вычислить поправки к резонансным условиям колебаний и решить задачу о возбуждении одного типа колебаний другими связанными с ним типами.

Выражаю глубокую благодарность А. А. Пистолькорсу за руководство работой и А. В. Вашковскому за ряд ценных советов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод формул (13)

Формулы (13) с верхними знаками и косинусоидальной зависимостью от φ имеются у Гобсона [6]. Необходимо вывести их для нижних знаков и для синусоидальной зависимости.

Легко показать, что

$$\frac{(\xi^m + \eta^m)}{2} = r^m \sin^m\theta \cos m\varphi,$$

$$\frac{(\xi^m - \eta^m)}{2} = r^m \sin^m\theta \sin m\varphi,$$

из чего следует

$$r^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi = (-1)^m \frac{(n+m)!}{2^m (n-m)!\, m!}\left[Z^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2m+2)} Z^{n-m-2}\xi\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-m)\ldots(n-m-3)}{2\cdot 4\cdot (2m+2)(2m+4)} Z^{n-m-4}(\xi\eta)^2 + \cdots \right] \frac{(\xi^m - \eta^m)}{2i}.$$

При помощи такого же метода преобразования, изложенного в § 88 работы [6], можно получить формулы (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. R. Walker, Phys. Rev., 1957, **105**, 2, 390.
2. А. А. Пистолькорс, Сюй Янь-шэн, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 1, 3.
3. Сюй Янь-шэн, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 1, 15.
4. Сюй Янь-шэн, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 12, 1951.
5. W. Hauser, L. Brown, J. Appl. Phys., 1959, **30**, 9, 1460.
6. Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
7. L. Robin, Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidals, **1**, 1957.
8. P. Fletcher, I. H. Solt, J. Appl. Phys., 1959, Suppl. to **30**, 4, 181 s.

Поступила в редакцию
19 I 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 10

О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

Б. Е. Кинбер

Рассмотрена осесимметричная задача о дифракции тороидальной волны, возбуждаемой кольцевой нитью тока, на внутренней поверхности сферы. Условие периодичности по углу θ заменено условием излучения. Исследование коротковолновой асимптотики решения показывает, что результирующее поле может быть представлено в виде суммы лучей многократно отраженных волн, полей каустик и поля волны «шепчущей галереи». Отличие дифракции на сфере от дифракции на цилиндре [1] определяется множителем фокусировки, имеющим чисто геометрический смысл вдали от оси симметрии и чисто дифракционный — вблизи нее. Исследованная задача позволяет описать дифракцию краевой волны на вогнутой стороне зеркальной антенны.

ВВЕДЕНИЕ

При падении волны на зеркало конечного размера от его кромки, как показывает анализ решения задачи о дифракции на полуплоскости и диске, уходит цилиндрическая или тороидальная волна. Благодаря вогнутой поверхности зеркала эта волна несколько раз отражается от поверхности зеркала.

В работе [1] исследованы некоторые закономерности дифракции такой волны на вогнутой цилиндрической поверхности. Ниже рассмотрены закономерности дифракции вблизи вогнутой поверхности двойной кривизны, в качестве которой выбрана простейшая — поверхность сферы. Для упрощения задачи рассмотрено осесимметричное поле, возбуждаемое кольцом тока.

В реальном зеркале волны, отражающиеся от его вогнутой поверхности, уходят от зеркала и поле удовлетворяет условию излучения. В рассматриваемой задаче для упрощения решения взята замкнутая поверхность сферы, а условие излучения вводится заранее, т. е. вне кольца тока решение ищется в виде суммы нормальных волн, «убегающих» по углу θ от кольца. Такая форма решения применялась ранее [2, 3] при анализе распространения сверхдлинных волн между поверхностью земли и ионосферой.

Таким образом, в отличие от обычного определения в сферической системе координат, θ меняется в интервале $(-\infty, \infty)$. Значения θ, отличающиеся на $2\pi n$, соответствуют разному количеству «оборотов» волны, т. е. разным фазовым сомножителям. Интересующая нас область изменения θ, учитывая симметрию задачи, лежит в интервале $(0, \pi)$.

Естественно, что при осевой симметрии задачи расположение лучей в меридиональной плоскости сферы совпадает с расположением лучей в цилиндре. Поэтому часть выкладок, совпадающая с аналогичными расчетами в цилиндре, не приведена.

1. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЗАДАЧИ

Решение задачи, обладающей осевой симметрией, можно представить в виде полной системы собственных функций, удовлетворяющих граничным условиям. Все составляющие можно выразить через потенциал Абрагама, имеющий только φ-ю составляющую поля, $\vec{A} = \vec{\varphi}_0 A(\theta, R)$ как для

поля электрического типа

$$H_R = -\frac{1}{\omega\mu\varepsilon R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A),\quad E_R = 0,$$
$$H_\theta = \frac{1}{\omega\mu\varepsilon R}\frac{\partial}{\partial R}(RA),\quad E_\theta = 0, \tag{1}$$
$$H_\varphi = 0,\quad E_\varphi = i\omega A,$$

так и для поля магнитного типа

$$H_R = 0,\quad E_R = -\frac{1}{\omega\mu\varepsilon R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A),$$
$$H_\theta = 0,\quad E_\theta = \frac{1}{\omega\mu\varepsilon R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial R}(RA), \tag{2}$$
$$H_\varphi = -i\omega A,\qquad E_\varphi = 0.$$

Потенциал A удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RA) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A)\right) + K^2A = 0, \tag{3}$$

где $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$.

Граничное условие для потенциала для волн электрического типа имеет вид

$$A = 0, \tag{4}$$

а для волн магнитного типа —

$$\frac{\partial}{\partial R}(RA) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (3) решается методом разделения переменных:

$$A = U(R)\,\Phi(\theta). \tag{6}$$

Решение для U без особенности в центре сферы имеет вид

$$U = \frac{1}{\sqrt{kR}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR),\quad \operatorname{Re}\nu \geqslant 0,\quad \operatorname{Im}\nu \geqslant 0, \tag{7}$$

а собственные значения ν определяются из (4) или (5) как корни уравнений

$$J_{\nu+\frac{1}{2}}(ka) = 0, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial(kR)}\left[\sqrt{kR}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\right]\Big|_{R=a} = 0, \tag{5a}$$

где a — радиус сферы.

Решение уравнения для Φ возьмем в виде $P^1_\nu(\cos\theta)$ или в виде

$$L_\nu = Q^1_\nu(\cos\theta) + i\frac{\pi}{2}P^1_\nu(\cos\theta).$$

Действительные корни (4а) или (5а) соответствуют распространяющимся волнам, а мнимые — затухающим волнам, описывающим особенность источника.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Определим функцию Грина $\Gamma = \Gamma(R, \theta, R', \theta')$ задачи, т. е. функцию, удовлетворяющую следующим условиям.

1. Γ удовлетворяет волновому уравнению (3) всюду, за исключением кольца (R', θ') $(kR'\sin\theta' \geqslant 1)$, где находится нить тока.

2. Вблизи кольца (R', θ') Γ имеет особенность:

$$\Gamma = \pi i H_0^{(1)}(k\varrho) + \Gamma' \cong -2\ln k\rho, \tag{8}$$

где ϱ — расстояние от точки наблюдения до ближайшей точки кольца; Γ' — функция без особенностей.

3. При $|\theta - \theta'| \to \infty$ Γ удовлетворяет условию излучения волноводного типа, т. е. является волной, бегущей от источника.

4. На поверхности сферы $R = a$ Γ удовлетворяет граничному условию (4а) или (5а), а в центре сферы не имеет особенностей.

Используем далее вместо условия возбуждения (8) его эквивалент:

$$\left.\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta'+0} - \left.\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta'-0} = -4\pi R\delta(R - R') \tag{9}$$

на конусе $\theta = \theta'$.

Будем искать Γ в виде

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{kR}}\sum_s A_s J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR)\, L_{\nu_s}(\cos\theta)\, P^1_{\nu_s}(\cos\theta'), \quad \theta \geqslant \theta',$$
$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{kR}}\sum_s A_s J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR)\, P^1_{\nu_s}(\cos\theta)\, L_{\nu_s}(\cos\theta'), \quad \theta \leqslant \theta'. \tag{10}$$

Суммирование производится по всем собственным значениям ν_s.

Подставляя (10) в (9) и учитывая, что

$$\frac{d}{d\theta}L_\nu P^1_\nu - \frac{d}{d\theta}P^1_\nu L_\nu = -\frac{\nu(\nu+1)}{\sin\theta}, \tag{11}$$

умножая обе части равенства на $\frac{1}{\sqrt{kR}}J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR)$, интегрируя по R в пределах $(0, a)$, используя соотношение

$$\int \frac{J_n J_m}{x}dx = \frac{x}{n^2 - m^2}[J_n J'_m - J_m J'_n] \qquad (x = kR)$$

и граничные условия, получим

$$A_s = 8\pi\frac{\sqrt{kR'}}{ka}\sin\theta'\frac{\nu_s+\frac{1}{2}}{\nu_s(\nu_s+1)}J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR')\frac{1}{D_s}, \tag{12}$$

где

$$D_s = \frac{1}{\sqrt{kR}}\frac{d}{d\nu}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\frac{d}{d(kR)}\left[\sqrt{kR}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\right]\Big|_{\substack{R=a\\ \nu=\nu_s}} \tag{13а}$$

при граничном условии (4а) и

$$D_s = -\frac{1}{\sqrt{kR}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\frac{d^2}{d\nu d(kR)}\left[\sqrt{kR}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\right]\Big|_{\substack{R=a\\ \nu=\nu_s}} \tag{13б}$$

при граничном условии (5а).

Подставляя (12) в (10), получим

$$\Gamma = \frac{8\pi}{ka}\sqrt{\frac{R'}{R}}\sin\theta'\sum_s \frac{\nu_s+\frac{1}{2}}{\nu_s(\nu_s+1)D_s}\, J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR)J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR')\begin{Bmatrix} L_{\nu_s} & P^1_{\nu_s}\\ P^1_{\nu_s} & L_{\nu_s}\end{Bmatrix}, \tag{14}$$

где для $\theta \geqslant \theta'$ берется верхняя строчка в фигурной скобке, а для $\theta \leqslant \theta'$ — нижняя строчка.

Будем далее рассматривать граничное условие (5а), а кольцо тока поместим на стенку. В этом случае выражение (14) можно представить в виде интеграла по контуру C_0, охватывающего все собственные значения ν_s на комплексной плоскости ν, но не захватывающего начало координат:

$$\Gamma = \frac{L}{ka}\sqrt{\frac{a}{R}}\sin\theta' \int_{C_0} \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)}{J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka) + \frac{1}{2ka}J_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)} \frac{\nu+\frac{1}{2}}{\nu(\nu+1)} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} L_\nu(\cos\theta) & P^1_\nu(\cos\theta') \\ P^1_\nu(\cos\theta) & L_\nu(\cos\theta') \end{Vmatrix} d\nu. \qquad (15)$$

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПРИ $ka \gg 1$

Рассмотрим асимптотику решения (15) для случая сферы большого радиуса, $ka \gg 1$. В этом случае можно отбросить член $\frac{1}{2ka}J_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)$ в знаменателе.

В соответствии с асимптотическим представлением присоединенных функций Лежандра будем различать два случая для значения ν в точках стационарной фазы (см. [1]):

а) $\theta\nu \gg 1$ — область вдали от оси симметрии,

б) $\theta\nu \leqslant 1$ (или $(\pi - \theta)\,\nu \leqslant 1$) — область фокального пятна вблизи оси симметрии.

Рассмотрим оба случая.

а) $\theta\nu \gg 1$.

В этом случае

$$L_\nu = \sqrt{\frac{\pi\nu}{2\sin\theta}}\exp\left\{i\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{3\pi}{4}\right]\right\},$$

$$P^1_\nu = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi\sin\theta}}\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{3\pi}{4}\right] \qquad (16)$$

и (15) можно записать в виде

$$\Gamma = -\frac{2}{ka}\sqrt{\frac{a\sin\theta'}{R\sin\theta}}\int \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)}{J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)}\left\{e^{i\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta+\theta')\frac{\pi}{2}\right]} - e^{\mp i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')}\right\}d\nu, \qquad (17)$$

Причем знак плюс в показателе второго члена соответствует случаю $\theta > \theta'$, а знак минус — случаю $\theta < \theta'$.

При выводе полагалось, что $\nu \gg 1$, т. е. $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)/(\nu+1) = 1$. Легко видеть, что сомножитель $\sqrt{a\sin\theta'/R\sin\theta}$ соответствует чисто геометрическому фактору усиления амплитуды из-за уменьшения сечения лучевых трубок между меридиональными плоскостями.

В остальном формула (17) соответствует формуле (19) работы [1], если учесть также, что слагаемое с фазой $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta+\theta') - \frac{\pi}{2}$ соответствует излучению блестящей точки на дальней части кольца тока, а слагаемое с фазой $\mp\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')$ — излучению ближней точки кольца тока. Дополнительная фаза $-\pi/2$ в первом члене связана с прохождением поля через осевую каустику.

Таким образом, различие в дифракции нити тока на вогнутой цилиндрической поверхности и кольца тока на сферической поверхности вдали от оси состоит лишь в дополнительной геометрической фокусировке, связанной с осевой симметрией задачи и наличием двух «источников», соответствующих дальней и ближней точкам кольца. Полное поле можно представить в виде суммы лучей, проходящих или пролетающих мимо точки наблюдения, и полей поверхностных волн, излучаемых двумя источниками,— ближней и дальней точками наблюдения.

Внутри кольца тока лучи и волны движутся навстречу друг другу и образуют стоячую волну; вне кольца они движутся примерно по одному направлению.

Количество и амплитуда волн, расположение каустик соответствуют анализу, проделанному для цилиндрической поверхности.

б) $\theta\nu \leqslant 1$. Случай $\theta\nu \leqslant 1$ соответствует интересующему нас случаю дифракции краевой волны кромки зеркала в центре вогнутой поверхности зеркала. Поскольку мы заранее предположили, что диаметр кольца тока много больше длины волны, то в (15) асимптотика $L_\nu(\cos\theta)$ берется согласно (16), а для $P_\nu^1(\cos\theta)$ справедливо выражение [4]

$$P_\nu^1(\cos\theta) \simeq -\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\,J_1\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right]. \tag{18}$$

Следовательно,

$$\Gamma = i\frac{\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}}{ka}\sqrt{\frac{a\sin\theta'}{R}\frac{\theta}{\sin\theta}}\int\sqrt{\nu}\,J_1\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right]\times \\ \times\frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)}{J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)}e^{i\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta'+\frac{3\pi}{4}\right]}\,d\nu. \tag{19}$$

Поскольку функция (18) меняется медленно по сравнению с функцией $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\Big/J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)$ при изменении ν, то при интегрировании по методу стационарной фазы она может рассматриваться как медленно меняющаяся.

В остальном структура подынтегрального выражения (19) соответствует структуре подынтегрального выражения первого члена (17) для $\theta = 0$, и, следовательно, интеграл (19) дает обычные амплитуды поля лучей и каустик, умноженные на фактор $\sqrt{\nu}\,J_1\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta'\right]$, который можно рассматривать как дифракционный фактор фокусировки вблизи фокального пятна.

Как было отмечено ранее [1], в точках стационарной фазы ν должно быть меньше ka для того, чтобы можно было при интегрировании применять метод стационарной фазы. Поэтому следует трансформировать в интеграл не весь ряд (14), а оставить в старом виде нормальные волны с наибольшими ν_s, которые интерпретируются как поверхностная волна шепчущей галереи. Легко видеть, что приведенный выше анализ асимптотик угловых функций применим к ряду так же, как и к интегралу. Поэтому наряду с осевой фокусировкой лучей и каустик происходит фокусировка поверхностной волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ асимптотики дифракции на поверхности двойной кривизны показал, что отличие дифракции на ней от дифракции на цилиндрической поверхности состоит в факторе геометрической фокусировки вдали от оси симметрии и факторе дифракционной фокусировки вблизи оси симметрии по отношению ко всем элементам, составляющим полное поле,— лучам, каустикам и поверхностной волне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Е. Кинбер, О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности кругового цилиндра, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 8, 000.
2. П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, Изд. МГУ, 1947.
3. W. Schuman, Über die Oberfelder bei der Ausbreitung langer electrischer Wellen, Z. angew. Phys., 1954, 6, s. 35, 225, 267, 346.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1955.

Поступила в редакцию
1 XII 1960

1961 № 10

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СТУПЕНЬКЕ ИМПЕДАНСА КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

В. В. Колпаков

Рассмотрена задача о дифракции аксиально-симметричных поверхностных волн на ступеньке импеданса кругового цилиндра. Получены выражения для коэффициентов отражения и прохождения по мощности, а также диаграммы излучения.

ВВЕДЕНИЕ

В работах Тренева [1], Вейля [2] и Кея [3] рассмотрена задача о дифракции поверхностных электромагнитных волн на ступеньке импеданса, заданного на безграничной плоскости. Аналогичная задача обсуждена Талановым [4] как предельный случай задачи о дифракции электромагнитных волн на ступеньке импеданса одной из стенок плоского волновода.

В данной работе рассмотрена задача о дифракции электромагнитных поверхностных волн на ступеньке импеданса для более сложной системы — безграничного импедансного цилиндра. Поскольку цилиндрические системы находят применение наряду с плоскими системами поверхностных волн, решение такой задачи имеет как теоретический, так и прикладной интерес.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим поверхностную аксиально-симметричную *TM*-волну. Решение задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial H}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}+\left(k^2-\frac{1}{\rho^2}\right)H=0$$

для единственной составляющей магнитного поля $H_\varphi = H(\rho, z)$ с использованием граничных условий на поверхности импедансного цилиндра

$$E_z = ZH_\varphi \tag{1}$$

и условия на бесконечности. В плоскости $z = 0$ имеет место скачок импеданса

$$Z=\begin{cases}Z_1=-iQ_1 & \text{при } z<0,\\ Z_2=-iQ_2 & \text{при } z>0.\end{cases} \tag{2}$$

Составляющие электрического поля находятся из уравнений

$$E_\rho=-\frac{i}{k}\frac{\partial H}{\partial z},\qquad E_z=\frac{i}{k}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H), \tag{3}$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Временна́я зависимость взята в виде $e^{-i\omega t}$.

С учетом соотношений (2) и (3) граничные условия (1) принимают вид

$$\frac{\partial H}{\partial\rho}+\frac{akQ+1}{a}H=0 \quad \text{при } \rho=a. \tag{4}$$

Слева ($z < 0$) на импедансную ступеньку набегает поверхностная волна

$$H(\rho, z) = H_1^{(1)}(\rho, v_1)\, e^{ih_1 z}, \tag{5}$$

где постоянная распространения h_1 определяется дисперсионным уравнением

$$v_1 H_0^{(1)}(av_1) + kQ_1 H_1^{(1)}(av_1) = 0, \quad v_1 = \sqrt{k^2 - h_1^2}, \tag{6}$$

которое может быть получено из равенств (4) и (5).

2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

При помощи теоремы Грина запишем решение задачи в интегральной форме. При этом потребуем, чтобы функция Грина удовлетворяла граничным условиям (4) для $Z = Z_1$ по всей длине цилиндра. В результате получим уравнение

$$H(\rho, z) = H_1^{(1)}(\rho, v_1)\, e^{ih_1 z} + 2\pi ak\,(Q_2 - Q_1)\int_0^\infty G(\rho, a, z, z')\, H(a, z')\, dz'. \tag{7}$$

Амплитуда Фурье $g(\varrho, a, w)$ функции Грина $G(\varrho, a, z, z')$ находится в виде

$$g(\rho, a, w) = -\frac{1}{2\pi a}\,\frac{H_1^{(1)}(\rho v)}{vH_0^{(1)}(av) + kQ_1 H_1^{(1)}(av)}, \qquad \rho \geqslant a, \tag{8}$$

где $v = \sqrt{k^2 - w^2}$.

Таким образом, чтобы вычислить составляющие поля по формулам (7) и (3), необходимо прежде вычислить тангенциальную составляющую магнитного поля $H(a, z)$ при $z > 0$. Полагая в (7) $\rho = a$ и $z > 0$, получаем интегральное уравнение для этой составляющей

$$H(a, z) = H_1^{(1)}(av_1)\, e^{ih_1 z} + 2\pi ak\,(Q_2 - Q_1)\int_0^\infty G(a, a, z, z')\, H(a, z')\, dz'. \tag{9}$$

Полученное неоднородное интегральное уравнение (9) с симметричным ядром носит название уравнения Винера — Хопфа. Методы решения этого уравнения в настоящее время разработаны достаточно полно [5]. Решение уравнения проводится на плоскости комплексного переменного. Для этого временно предполагается, что постоянная распространения k имеет исчезающе малую положительную мнимую часть. Опуская детали расчета, выпишем результат решения уравнения (9). Амплитуда Фурье $h(a, w)$ искомой функции $H(a, z)$ имеет вид

$$h(a, w) = \int_0^\infty e^{iwz} H(a, z)\, dz = iH_1^{(1)}(av_1)\,\Psi_1(h_1)\,\frac{\Psi_1(w)}{w + h_1}, \tag{10}$$

где функции

$$\Psi_1(w) = \sqrt{\frac{[vH_0^{(1)}(av) + kQ_1 H_1^{(1)}(av)]\,(w + h_1)\,(w - h_2)}{[vH_0^{(1)}(av) + kQ_2 H_1^{(1)}(av)]\,(w - h_1)\,(w + h_2)}}\,\exp\left[\frac{M(w)}{2}\right],$$

$$\Psi_2(w) = \Psi_1(-w) = \sqrt{\frac{[vH_0^{(1)}(av) + kQ_1 H_1^{(1)}(av)]\,(w - h_1)\,(w + h_2)}{[vH_0^{(1)}(av) + kQ_2 H_1^{(1)}(av)]\,(w + h_1)\,(w - h_2)}}\exp\left[-\frac{M(w)}{2}\right] \tag{11}$$

есть результат разложения

$$\frac{vH_0^{(1)}(av) + kQ_1 H_1^{(1)}(av)}{vH_0^{(1)}(av) + kQ_2 H_1^{(1)}(av)} = \Psi_1(w)\,\Psi_2(w). \tag{12}$$

Числа h_1 и h_2 суть постоянные распространения поверхностных волн соответственно при $z < 0$ и $z > 0$; h_1 является решением дисперсионного уравнения (6), а h_2 — уравнения

$$v_2 H_0^{(1)}(av_2) + kQ_2 H_1^{(1)}(av_2) = 0, \quad v_2 = \sqrt{k^2 - h_2^2}. \tag{13}$$

Функции $\Psi_1(w)$ и $\Psi_2(w)$ обладают следующими свойствами. Функция $\Psi_1(w)$ голоморфна, не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} w > -c$ и обращается в этой полуплоскости в единицу при $|w| \to \infty$; функция $\Psi_2(w)$ обладает такими же свойствами в полуплоскости $\operatorname{Im} w < c$, где $c \leqslant \operatorname{Im} h_1$ и $c \leqslant \operatorname{Im} h_2$. Функция

$$M(u) = X(u) + iY(u)$$

не имеет особенностей, причем

$$X(u) = \frac{2u}{\pi} \int_0^k \frac{\Omega(w)\, dw}{w^2 - u^2}$$

при $|u| > k$; (14)

$$Y(u) = -\frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Omega(w)\, dw}{w - u}$$

$$X(u) = \frac{2u}{\pi} \int_0^k \frac{v\,\Omega(v) - v_0\Omega(v_0)}{(v_0^2 - v^2)\sqrt{k^2 - v^2}}\, dv$$

при $|u| < k$; (15)

$$Y(u) = -\Omega(v_0) - \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Omega(w)\, dw}{w - u}$$

$$v_0 = \sqrt{k^2 - u^2};$$

$$\Omega(w) = \operatorname{arctg} \frac{vN_0(av) + kQ_1N_1(av)}{vJ_0(av) + kQ_1N(av)} - \operatorname{arctg} \frac{vN_0(av) + kQ_2N_1(av)}{vJ_0(av) + kQ_2J_1(av)}. \tag{16}$$

Применяя к уравнению (7) преобразование Фурье, используя при этом соотношения (8) и (10), находим

$$H(\rho, z) = H_1^{(1)}(\rho v_1)\, e^{ih_1 z} + \frac{k(Q_2 - Q_1)}{2\pi i} H_1^{(1)}(av_1)\, \Psi_1(h_1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwz} \frac{\Psi_1(w)\, H_1^{(1)}(\rho v)\, dw}{(w + h_1)\,[vH_0^{(1)}(av) + kQ_2 H_1^{(1)}(av)]}. \tag{17}$$

При помощи соотношения (12) равенство (17) приводится к виду

$$H(\rho, z) = H_1^{(1)}(\rho v_1)\, e^{ihz} + \frac{k(Q_2 - Q_1)}{2\pi i} H_1^{(1)}(av_1)\, \Psi_1(h_1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwz} \frac{H_1^{(1)}(\rho v)\, dw}{(w + h_1)\,\Psi_2(w)\,[vH_0^{(1)}(av) + kQ_2 H_1^{(1)}(av)]}. \tag{18}$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЕЙ

Чтобы вычислить поле поверхностной волны при $z < 0$, деформируем путь интегрирования в (18) в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Вычисляя вычет в полюсе $w = h_1$, используя при этом формулы (11), находим

$$H(\rho, z) = H_1^{(1)}(\rho v_1)\, e^{ih_1 z} + \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \exp M(h_1)\, H_1^{(1)}(\rho v_1)\, e^{-ih_1 z}, \quad z < 0. \tag{19}$$

Здесь первый член представляет собой поверхностную волну, набегающую на ступеньку, второй член — отраженную волну.

Деформируя в (17) при $z > 0$ путь интегрирования в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ и вычисляя вычеты в полюсах $w = -h_1$ и $w = -h_2$, находим поле прошедшей поверхностной волны

$$H(\rho, z) = \frac{2h_1}{h_1 + h_2} \sqrt{\frac{[H_1^{(1)}(av_1)]^2 - H_0^{(1)}(av_1) H_2^{(1)}(av_1)}{[H_1^{(1)}(av_2)]^2 - H_0^{(1)}(av_2) H_2^{(1)}(av)}} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{M(h_1)}{2} - \frac{M(h_2)}{2}\right] H_1^{(1)}(\rho v_2)\, e^{ih_2 z}, \qquad z > 0. \tag{19б}$$

Коэффициенты отражения R и прохождения T по мощности определяются выражениями

$$R = \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}\right)^2 \exp 2X(\beta_1),$$
$$T = \frac{4\beta_1\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \exp[X(\beta_1) - X(\beta_2)], \tag{20}$$

где $\beta_1 = h_1/k$ и $\beta_2 = h_2/k$ — коэффициенты замедления справа и слева от ступеньки импеданса.

Формулы (20) получены путем вычисления потока мощности набегающей, отраженной и прошедшей волн в плоскости $z = \text{const}$ справа и слева от ступеньки импеданса. Поскольку $\beta_1 > 1$ и $\beta_2 > 1$, то $X(\beta_1)$ и $X(\beta_2)$ в (20) вычисляются по формуле (14).

Интересно проследить зависимость коэффициентов отражения и прохождения от a/λ при больших значениях ak. Для таких значений ak можно использовать представление цилиндрических функций в (6), (13) и (16) в виде полусходящихся рядов. Разлагая функцию $\Omega(w)$ в ряд по степеням $1/ak$ и отбрасывая члены со степенями $1/ak$ выше двух, после довольно громоздких, но несложных вычислений получим

$$\Omega(w) = \operatorname{arctg} \frac{k\sqrt{\beta_2^2 - 1}}{v} - \operatorname{arctg} \frac{k\sqrt{\beta_1^2 - 1}}{v} + \frac{3}{8a^2kv} \frac{\sqrt{\beta_1^2 - 1} - \sqrt{\beta_2^2 - 1}}{\sqrt{\beta_1^2 - 1}\ \sqrt{\beta_2^2 - 1}}. \tag{21}$$

Интегралы в (14), если функция $\Omega(w)$ взята из (21), вычисляются. В результате вычислений получаем следующие приближенные выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$R = \frac{\beta_1^2 - 1}{\beta_1^2(\beta_1 + \beta_2)^2} \left(\sqrt{\beta_1^2 - 1} - \sqrt{\beta_2^2 - 1}\right)^2 \exp\left(\frac{3}{4a^2k^2} \frac{\sqrt{\beta_2^2 - 1} - \sqrt{\beta_1^2 - 1}}{(\beta_1^2 - 1)\sqrt{\beta_2^2 - 1}}\right),$$
$$T = \frac{4\sqrt{\beta_1^2 - 1}\sqrt{\beta_2^2 - 1}}{\left(\sqrt{\beta_1^2 - 1} + \sqrt{\beta_2^2 - 1}\right)^2} \exp\left[\frac{3}{8a^2k^2} \frac{\left(\sqrt{\beta_2^2 - 1} - \sqrt{\beta_1^2 - 1}\right)^2}{(\beta_1^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)}\right]. \tag{22}$$

Заметим, что в (22) числа при экспоненциальных множителях являются соответственно коэффициентами отражения R_∞ и прохождения T_∞ по мощности для ступеньки на импедансной плоскости. Эти коэффициенты могут быть получены из формул, найденных Треневым [1]. Из формул (22) видно, что зависимость R и T от радиуса цилиндра при больших значениях a/λ оказывается довольно слабой.

На рис. 1, 2 и 3 представлены кривые зависимости R/R_∞ и T/T_∞ от отношения a/λ, рассчитанные по формулам (20), (14), (16) и (13) при помощи универсальной цифровой вычислительной машины. Долю энергии, которую несет пространственная волна, удобно характеризовать коэффи-

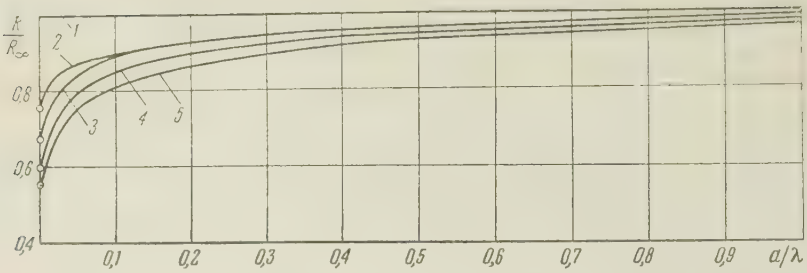


Рис. 1. Зависимость коэффициентов отражения R/R_∞ от отношения a/λ ($\beta_2 = 1{,}05$):

1 — $\beta_1 = 1{,}05$; *2* — $\beta_1 = 1{,}1$; *3* — $\beta_1 = 3{,}0$; *4* — $\beta_1 = 2{,}0$; *5* — $\beta_1 = 1{,}5$

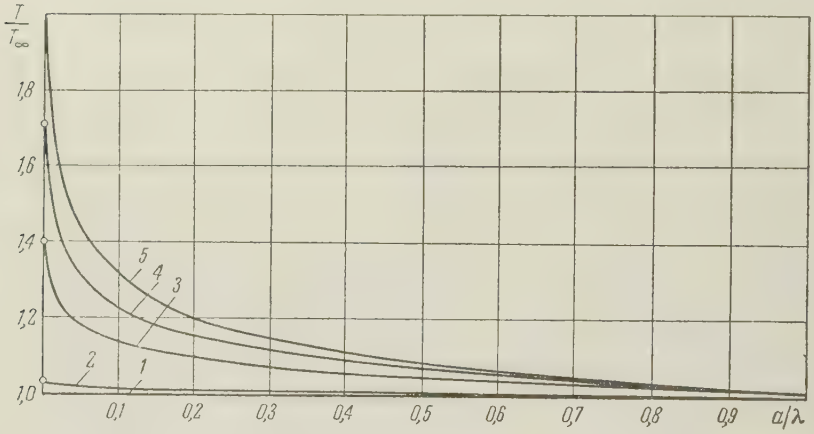


Рис. 2. Зависимость коэффициентов прохождения T/T_∞ от отношения a/λ ($\beta_2 = 1{,}05$):

1 — $\beta_1 = 1{,}05$; *2* — $\beta_1 = 1{,}1$; *3* — $\beta_1 = 1{,}5$; *4* — $\beta_1 = 2{,}0$; *5* — $\beta_1 = 3{,}0$

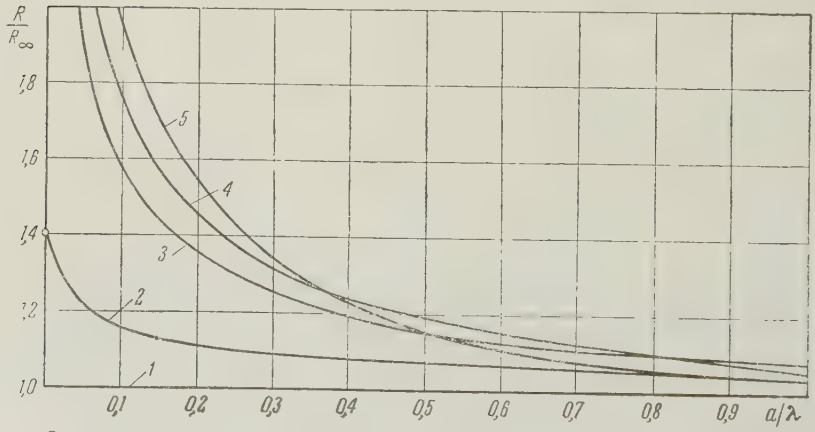


Рис. 3. Зависимость коэффициентов отражения R/R_∞ от отношения a/λ ($\beta_1 = 1{,}05$):

1 — $\beta_2 = 1{,}05$; *2* — $\beta_2 = 1{,}1$; *3* — $\beta_2 = 1{,}5$; *4* — $\beta_2 = 2{,}0$; *5* — $\beta_2 = 3{,}0$

циентом излучения

$$\eta = 1 - R - T.$$

Кривые для η/η_∞ представлены на рис. 4 и 5 (η_∞ — коэффициент излучения для импедансной ступеньки на плоскости).

Из кривых видно, что существенная зависимость R, T и η от a/λ имеет место только при малых значениях a/λ. При $a/\lambda > 1$ R/R_∞, T/T_∞ и η/η_∞

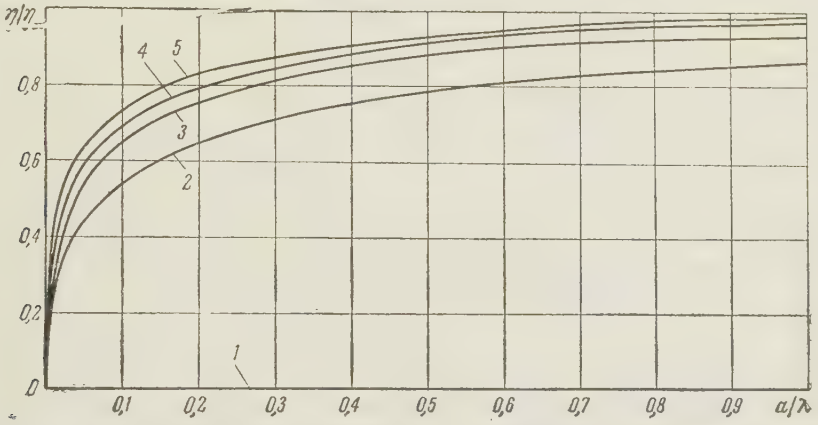


Рис. 4. Зависимость коэффициентов излучения η/η_∞ от отношения $a/\lambda(\beta_2 = 1{,}05)$:

1 — $\beta_1 = 1{,}05$; *2* — $\beta_1 = 1{,}1$; *3* — $\beta_1 = 1{,}5$; *4* — $\beta_1 = 2{,}0$; *5* — $\beta_1 = 3{,}0$

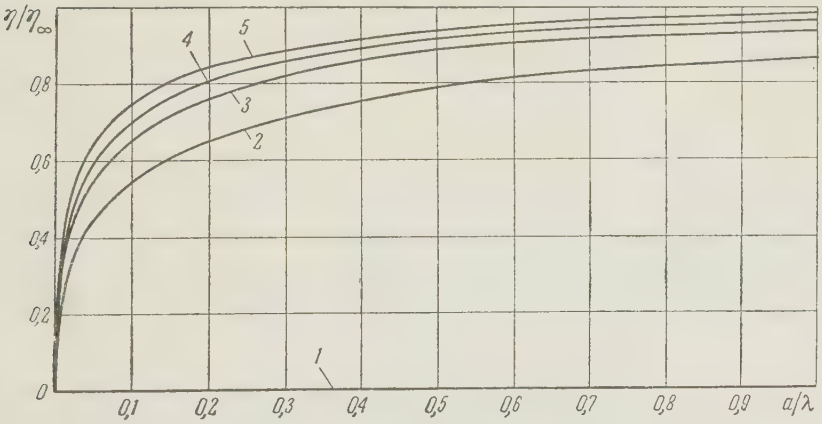


Рис. 5. Зависимость коэффициентов излучения η/η_∞ от отношения $a/\lambda\,(\beta_1 = 1{,}05)$:

1 — $\beta_2 = 1{,}05$; *2* — $\beta_2 = 1{,}1$; *3* — $\beta_2 = 1{,}5$; *4* — $\beta_2 = 2{,}0$; *5* — $\beta_2 = 3{,}0$

мало отличаются от единицы. Для таких значений a/λ коэффициенты R, T и η можно рассчитать по приближенным формулам (22). При $a/\lambda \to 0$ функция $X(u)$ обращается в нуль, а коэффициенты R, T и η стремятся к значениям

$$R_0 = \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}\right)^2, \qquad T_0 = \frac{4\beta_1\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)^2}, \quad \eta_0 = 0.$$

Вычислим теперь поле излучения, возникающее в результате дифракции поверхностной волны на ступеньке импеданса. Для этого перейдем

в интегралах (17) или (18) к новой переменной τ при помощи замены

$$w = k\cos\tau, \quad v = k\sin\tau$$

и к сферической системе координат

$$z = r\cos\theta, \quad \varrho = z\sin\theta.$$

Оценивая интеграл в (18) для больших значений $k\tau$ методом перевала (седловая точка $\tau = \pi - \theta$), находим

$$H(r,\Theta) = \frac{1}{\pi i}\frac{e^{ikr}}{r} \times$$

$$\times \sqrt{2(Q_2 - Q_1)\frac{h_1^2(h_1-h_2)}{k^2(h_1+h_2)}ak\{[H_1^{(1)}(av_1)]^2 - H_0^{(1)}(av_1)H_2^{(1)}(av_1)\}}\exp\left[\frac{M(h_1)}{2}\right]\times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{[\sin\Theta H_0^{(1)}(ak\sin\Theta) + Q_1 H_1^{(1)}(ak\sin\Theta)][\sin\Theta H_0^{(1)}(ak\sin\Theta) + Q_2 H_1^{(1)}(ak\sin\Theta)]}} \times$$

$$\times \frac{k(k\cos\Theta + h_2)}{\sqrt{(k^2\cos^2\Theta - h_1^2)(k^2\cos^2\Theta - h_2^2)}}\exp\left[-\frac{M(k\cos\Theta)}{2}\right]. \qquad (23)$$

Диаграмма излучения по мощности определяется функцией

$$\sum(\Theta) = \frac{(\cos\Theta + \beta_1)\exp[-X(\cos\Theta)]}{(\cos^2\Theta - \beta_1^2)(\cos^2\Theta - \beta_2^2)\sqrt{(A^2+B^2)(C^2+D^2)}}, \qquad (24$$

где

$$A = \sin\theta J_0(ak\sin\theta)K_1(akq_1) + q_1 J_1(ak\sin\theta)K_0(akq_1);$$

$$B = \sin\theta N_0(ak\sin\theta)K_1(akq_1) + q_1 N_1(ak\sin\theta)K_0(akq_1);$$

$$C = \sin\theta J_0(ak\sin\theta)K_1(akq_2) + q_2 J_1(ak\sin\theta)K_0(akq_2);$$

$$D = \sin\theta N_0(ak\sin\theta)K_1(akq_2) + q_2 N_1(ak\sin\theta)K_0(akq_2);$$

$$q_1 = \sqrt{\beta_1^2 - 1}; \qquad q_2 = \sqrt{\beta_2^2 - 1}.$$

Функция $X(\cos\theta)$ в (24) определяется из формулы (15).

Решение задачи для TE-волны не приводим, поскольку все формулы, полученные для TM-волны, остаются в силе и для TE-волны, если провести замену H_φ на E_φ; E_ψ на $-H_\rho$; E_z на $-H_z$ и Z на $1/Z$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Тренев, Дифракция поверхностных электромагнитных волн на импедансной ступеньке, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 1, 27.
2. G. Weill, Etude d'un probleme de diffraction des ondes electromagnétiques de surface application a la théorie de l'antenna diélectrique, Ann. radioélectr., 1955, 10, 41, 228.
3. A. F. Kay, Scattering of a surface wave by a discontinuity on reactance, IRE Trans., 1959, AP-7, 1, 22.
4. В. И. Таланов, О дифракции электромагнитных волн на уступе поверхностного импеданса в волноводе. Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1957, 1, 3, 64.
5. В. А. Фок, О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Матем. сб. (новая серия), 1944, 14, 1—2,3.

Поступила в редакцию
18 I 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ВОЛН ВЫСШИХ ТИПОВ В КОАКСИАЛЬНОМ КАБЕЛЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ПРОВОДНИКАМИ

В. Я. Сморгонский

Определены собственные значения трансцендентного уравнения для трех волн (E_{01} и двух H_{11}-волн) в кольце между двумя конфокальными эллипсами в зависимости от эксцентриситета внешнего эллипса для двух значений отношения больших осей обоих эллипсов.

Целью работы является расчет влияния эксцентриситета проводников коаксиального кабеля на величину критической частоты волн высших типов. Влияние эксцентриситета проводников на электрические параметры коаксиального кабеля рассмотрено в работах [1—3]. В [1] и [2] вопрос о волнах высших типов не затрагивается. Лишь в [3] приведена общая формула для критической частоты волны E_{01}. Однако расчетная формула (уравнение (24) на стр. 359) дает выражение, не зависящее от эксцентриситета, так как при принятом автором приближении уравнение (19) определяет критическую частоту волны E_{01} в коаксиальном кабеле с круглыми проводниками (см., например, [4], стр. 527), т. е. приведенная формула не дает возможности оценить влияние эксцентриситета проводников на критическую частоту. Так как наименьшим значением критической частоты обладает волна H_{11}, то наибольший интерес представляет определение влияния эксцентриситета проводников на критическую частоту этого типа волны. Собственная функция эллиптического кольца может быть представлена как [3]

$$\Psi = [Je,\ o_n(\xi,\ h) + ANe,\ o_n(\xi,\ h)]\, se,\ o_n(\eta,\ h). \qquad (1)$$

Здесь A — коэффициент, определяемый краевыми условиями; se_n и so_n — четные и нечетные угловые, а Je_n, Jo_n, Ne_n, No_n — радиальные (модифицированные) функции Матье первого и второго родов порядка n *; h — параметр, определяемый из трансцендентных уравнений, которые при бесконечной проводимости внутреннего и внешнего проводников имеют вид

$$\frac{Je,\ o_n(\xi_1,\ h)}{Je,\ o_n(\xi_2,\ h)} = \frac{Ne,\ o_n(\xi_1,\ h)}{Ne,\ o_n(\xi_2,\ h)} \quad \text{для } TM\text{-волн}; \qquad (2а)$$

$$\frac{J'e,\ o_n(\xi_1,\ h)}{J'e,\ o_n(\xi_2,\ h)} = \frac{N'e,\ o_n(\xi_1,\ h)}{N'e,\ o_n(\xi_2,\ h)} \quad \text{для } TE\text{-волн}; \qquad (2б)$$

ξ_1 и ξ_2 — координаты эллипсов, соответствующих поверхности внутреннего и внешнего проводников; $\xi_1 = \operatorname{Arch}\frac{1}{e_1}$; $\xi_2 = \operatorname{Arch}\frac{1}{e_2}$; e_1 и e_2 — эксцентриситеты проводников. Штрих означает дифференцирование по ξ. Критическая частота связана с параметром h, определяемым из уравнений (2а) и (2б) соотношением [5]

$$\omega_{кр} = \frac{h}{a_1 e_1 \sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Так как мы рассматриваем кабель, проводники которого являются конфокальными эллипсами с большими полуосями a_1 и a_2, то при экс-

* В тексте использованы обозначения функций Матье, принятые в [5].

центриситете внешнего проводника $e_2 = a_1/a_2$ внутренний проводник превращается в бесконечно тонкую ленту шириной $2a_1$, уравнение которой при $e_2 = 1/k$ будет $\xi = 0$. Здесь $k = a_2/a_1$.

В этом случае трансцендентные уравнения будут такими:

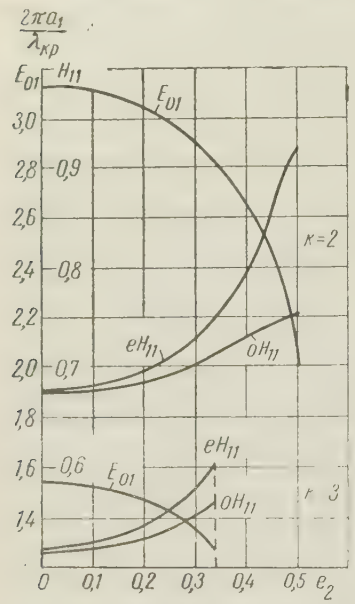
$$\frac{Je,\ o_n(o,\ h)}{Je,\ o_n(\xi_2,\ h)} = \frac{Ne,\ o_n(o,\ h)}{Ne,\ o_n(\xi_2,\ h)} \quad \text{для } TM\text{-волн}, \tag{3а}$$

$$\frac{J'e,\ o_n(o,\ h)}{J'e,\ o_n(\xi_2,\ h)} = \frac{N'e,\ o_n(o,\ h)}{N'e,\ o_n(\xi_2,\ h)} \quad \text{для } TE\text{-волн}. \tag{3б}$$

При определении влияния эксцентриситета на значение критической частоты волны H_{11} следует иметь в виду, что критические частоты четных eH_{11}- и нечетных oH_{11}-волн различны. Для четной волны при $1/k < e_2 < 1$ полоса $\xi = 0$, в которую вырождается внутренний проводник, оказывается перпендикулярной электрическим силовым линиям, т. е. структура поля получается такой же, как и в полом эллиптическом волноводе, а критическая частота будет определяться из выражения

$$J'e_1(\xi_2,\ h) = 0. \tag{4}$$

Для нечетной волны условие (3б) при $1/k < e_2 < 1$ будет справедливым при длине внутренней полосы $a_1 = a_2e_2$. Для определения значений h, удовлетворяющих уравнениям (2) и (3), удобно воспользоваться представлением радиальных функций Матье в виде быстро сходящихся рядов произведений цилиндрических функций ([6], стр. XXI).



Значения критических волновых чисел для колебаний eH_{11}, oH_{11} и E_{01} в коаксиальном кабеле с эллиптическими проводниками

Результаты расчетов приведены на рисунке, где собственные значения сооответствующих трансцендентных уравнений представлены в зависимости от эксцентриситета внешнего проводника. Наименьшим значением критической частоты обладает волна oH_{11}. Критическая частота волны E_{01} выше критических частот волн eH_{11} и oH_{11}.

Относительное изменение критических частот при увеличении эксцентриситета происходит быстрее при большом значении k; так, например, для волны eH_{11} при $e_2 = 0{,}3$ относительное изменение критической частоты будет равно 9% при $k = 2$ и 12% при $k = 3$. При эксцентриситете наружного провода $e_2 < 0{,}1$ значение критических частот практически не изменяется ($\Delta f/f < 0{,}01$). Быстрое изменение критических частот начинается с $e_2 > 0{,}2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Р. Шебес, Радиотехника, 1949, 4, 4, 36.
2. S. Mahaparta, Electronic and Radio Engr., 1958, 35, 2, 63.
3. J. Wong, Canad. J. Phys, 1956, 34, 4, 354.
4. А. Д. Гольдштейн, Н. В. Зернов, Электромагнитные поля и волны, Изд. Советское радио, 1956.
5. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, перев. с англ., ч. II, ИЛ, 1960.
6. Tables relating to Mathieux functions, Cambridge University Press, N. Y., 1951.

Поступила в редакцию
1 XII 1960

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров

Показано, что для электромагнитной волны, распространяющейся в плазме поперек внешнего магнитного поля H_0 и поляризованной вдоль этого поля (обыкновенная волна), результаты нелинейной теории и теории, использующей линеаризацию кинетического уравнения, совпадают.

Рассмотрим электромагнитные волны в магнитоактивной плазме, распространяющиеся перпендикулярно внешнему магнитному полю H_0. Будем считать поле H_0 однородным, а электромагнитный вектор — поляризованным вдоль этого поля (обыкновенная волна). Направим ось x параллельно направлению распространения волны, а ось z — параллельно полю H_0.

Процесс описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cos\delta\frac{\partial f}{\partial x} - \omega_H\frac{\partial f}{\partial \delta} + \frac{e}{m}E(t, x)\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{4\pi e}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} d\delta\int_0^{\infty} v dv\int_{-\infty}^{\infty} u f\, du, \tag{2}$$

где v, δ, u — цилиндрические координаты в пространстве скоростей; $f = f(t, x, v, \delta, u)$ — функция распределения электронов; $\omega_H = eH_0/mc$ — ларморовская частота; $E(t, x) = E_z(t, x)$; $j(t, x) = j_z(t, x)$.

Влиянием на электроны волнового магнитного поля пренебрегаем.

Первые интегралы характеристической системы уравнения (1) имеют вид

$$g_1 = \delta + \omega_H t = \text{const}, \qquad g_2 = x + \frac{v}{\omega_H}\sin\delta = \text{const},$$

$$g_3 = u - \frac{e}{m}\int_{t_0}^{t} E\left[\tau, x + \frac{v}{\omega_H}\sin\delta - \frac{v}{\omega_H}\sin(\delta + \omega_H t - \omega_H\tau)\right]d\tau = \text{const}.$$

Общее решение уравнения (1) будет произвольной функцией от g_1, g_2, g_3 и переменной v, входящей в это уравнение как параметр. В качестве функции распределения f будем брать такие решения уравнения (1), которые не зависят от g_1:

$$f = f(v, g_2, g_3). \tag{3}$$

Здесь f — произвольная неотрицательная функция своих аргументов, интегрируемая в бесконечных пределах в пространстве скоростей и четная относительно g_3. Функция распределения зависит от времени только через электрическое поле. При $E(t, x) = 0$ распределение становится стационарным: $f = f\left(v, x + \frac{v}{\omega_H}\sin\delta, u\right)$, причем четность относительно третьего аргумента означает равноправие положительного и отрицательного направлений оси z в отсутствие электрического поля.

Если функция распределения явно зависит от g_2, то плазма является неоднородной. В этом случае, как видно из выражения (3), в плазме

имеется стационарный ток, параллельный оси y:

$$j_y(x) = e\int_0^{2\pi}\sin\delta d\delta\int_0^{\infty}v^2\,dv\int_{-\infty}^{\infty}f\left(v,\ x+\frac{v}{\omega_H}\sin\delta,\ u\right)du.$$

Ток создает добавочное неоднородное стационарное магнитное поле в направлении оси z, давление которого должно компенсировать неоднородность давления плазмы. Мы не будем принимать во внимание неоднородность магнитного поля. Такое приближение справедливо, если величина μ_0, равная отношению давления плазмы к магнитному давлению, мала. Тогда допускаемая погрешность в определении волнового электрического поля будет иметь порядок μ_0^2 [1].

Вернемся к системе (1)—(2). Подсчитаем ток в направлении оси z:

$$j(t,\ x) = e\int_0^{2\pi}d\delta\int_0^{\infty}vdv\int_{-\infty}^{\infty}f(v,\ g_2,\ g_3)\,udu =$$

$$= \frac{e^2}{m}\int_0^{2\pi}d\delta\int_0^{\infty}\varphi\left(v,\ x+\frac{v}{\omega_H}\sin\delta\right)vdv\int_{t_0}^{t}E\left[\tau,\ x+\frac{v}{\omega_H}\sin\delta-\right.$$

$$\left.-\frac{v}{\omega_H}\sin(\delta+\omega_H t-\omega_H\tau)\right]d\tau. \qquad (4)$$

Здесь

$$\varphi\left(v,\ x+\frac{v}{\omega_H}\sin\delta\right) = \int_{-\infty}^{\infty}f\left(v,\ x+\frac{v}{\omega_H}\sin\delta,\ u\right)du. \qquad (5)$$

Подставляя (4) в (2), получим линейное интегродифференциальное уравнение относительно поля $E(t,\ x)$:

$$\frac{\partial^2E}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2} = \frac{4\pi e^2}{mc^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\delta\int_0^{\infty}\varphi\left(v,\ x+\frac{v}{\omega_H}\sin\delta\right)vdv\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t}E\left[\tau,\ x+\frac{v}{\omega_H}\sin\delta-\frac{v}{\omega_H}\sin(\delta+\omega_H t-\omega_H\tau)\right]d\tau. \qquad (6)$$

Подчеркнем, что уравнение (6) полностью совпадает с уравнением для электрического поля, полученным при помощи обычной процедуры линеаризации уравнения (1), однако наш вывод этого уравнения не связан с предположением о малости изменения функции f волновым полем.

Рассмотрим теперь поля, гармонически зависящие от времени:

$$E(t,\ x) = e^{-i\omega t}E(x) \qquad \left(\frac{\omega}{c}=k\right). \qquad (7)$$

Положим в (4) и (6) $t_0 = -\infty$ и рассмотрим внутренний интеграл по τ

$$I = \int_{-\infty}^{t}e^{-i\omega\tau}E\left[x+\frac{v}{\omega_H}\sin\delta-\frac{v}{\omega_H}\sin(\delta+\omega_H t-\omega_H\tau)\right]d\tau.$$

Вводя новую переменную интегрирования $\alpha = \delta+\omega_H t-\omega_H\tau$ и выполняя несложные преобразования, будем иметь

$$I = e^{-i\omega t}\frac{1}{2\omega_H\sin\frac{\omega}{\omega_H}\pi}\int_{\delta-2\pi}^{\delta}e^{i\frac{\omega}{\omega_H}(\alpha-\delta+\pi)}E\left[x+\frac{v}{\omega_H}(\sin\delta-\sin\alpha)\right]d\alpha.$$

Итак, для монохроматических волн уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d^2E}{dx^2} + k^2E = \frac{2\pi e^2}{mc^2} \frac{\frac{\omega}{\omega_H}}{\sin \frac{\omega}{\omega_H}\pi} \int_0^{2\pi} d\delta \int_{\delta-2\pi}^{\delta} e^{i\frac{\omega}{\omega_H}(\alpha-\delta+\pi)} d\alpha \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \varphi\left(v,\ x + \frac{v}{\omega_H}\sin\delta\right) E\left[x + \frac{v}{\omega_H}(\sin\delta - \sin\alpha)\right] v\,dv. \qquad (8)$$

И это уравнение, естественно, совпадает с соответствующим уравнением линеаризованной теории.

Правая часть уравнения (8) обращается в бесконечность для частот ω, кратных ларморовской частоте ω_H. В этом случае движение электронов по ларморовским окружностям попадает в резонанс с колебаниями в поле волны. В окрестности резонансных частот влияние волнового электрического поля на функцию распределения электронов уже не является малым и, следовательно, обычный подход к решению задачи, основанный на линеаризации кинетического уравнения, становится незаконным. Вывод уравнения (8) из нелинейной системы уравнений (1)—(2) обосновывает его справедливость (в рамках рассматриваемого приближения) также и для частот, близких к резонансным. Вопрос о том, как сказываются в окрестности резонансных частот неучтенные эффекты (влияние волнового магнитного поля, столкновения частиц и т. д.), требует специального исследования.

В заключение отметим, что имеется еще один случай, когда задача в нелинейной формулировке приводит к такому же уравнению для поля, что и линейная задача [2]. Характерно, что в обоих случаях волна является чисто поперечной. Если электрический вектор имеет продольную составляющую, то уравнение для поля оказывается существенно нелинейным. Процедура линеаризации при этом естественно приводит к другому уравнению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 1960, 39, 9, 845.
2. Р. З. Сагдеев, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций (сборник), Изд. АН СССР, 1958, 4, 422.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
22 II 1961

К РАСЧЕТУ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДОВ, НАГРУЖЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ДИАФРАГМАМИ

А. Н. Диденко, Л. Н. Безматерных

Выводится дисперсионное уравнение для синфазных волн прямоугольного волновода, нагруженного по боковым стенкам диэлектрическими диафрагмами. Наряду со строгим решением получено приближенное дисперсионное уравнение, позволяющее в более простой форме произвести учет высших пространственных гармоник.

В последнее время в зарубежной и отечественной литературе подробно рассматривается вопрос об эффективности и дисперсионных свойствах цилиндрических волноводов, нагруженных диэлектрическими диафрагмами [1, 2]. Теоретически и экспериментально установлено, что при использовании диэлектрика с большим значением ε и соответствующем подборе толщины диафрагм можно получить замедляющие системы, шунтовые сопротивления которых по крайней мере на порядок выше шунтовых сопротивлений волноводов с металлическими диафрагмами.

Замедляющие системы с высокими шунтовыми сопротивлениями обычно применяются в мощных ЛБВ и линейных электронных ускорителях с большой энергией, где вопрос о снижении мощности генераторов колебаний высокой частоты приобретает первостепенное значение. Кроме того, замкнутые изогнутые диафрагмированные волноводы могут быть использованы в качестве ускоряющих устройств электронных циклических ускорителей с большой энергией [3].

При достаточно хорошей технологии изготовления волноводов эффективность таких систем может быть на порядок выше эффективности обычных резонаторных систем. Проведенный анализ показал, что в этом случае наиболее подходящими являются изогнутые волноводы прямоугольного сечения, у которых диафрагмы расположены вдоль изогнутых стенок, а из всех волн, существующих в данных волноводах, наиболее подходящей является симметричная LE_{11} — волна, имеющая на среднем радиусе большую азимутальную составляющую электрического поля.

В [3] рассмотрены неизогнутые волноводы прямоугольного сечения с металлическими диафрагмами, поскольку для больших синхротронов изгиб будет малым и поэтому при исследовании различных электродинамических характеристик таких замедляющих систем в первом приближении изгибом можно пренебречь.

В настоящей работе изложены основы теории волноводов прямоугольного сечения, нагруженных диэлектрическими диафрагмами.

Рассматриваемая система представляет собой прямоугольный волновод высоты a и ширины b, внутри которого по боковым стенкам на расстоянии L_1 друг от друга установлены диэлектрические диафрагмы толщины L_2 и высоты h, изготовленные из изотропного диэлектрика с большим значением ε. Следуя [2], получим дисперсионные уравнения данной системы, исходя из дисперсионных уравнений для волн, существующих в данной системе в отсутствие центральных отверстий в диэлектрике. Ниже показано, что если поля зависят от обеих поперечных координат, то в рассматриваемой системе возможно существование только гибридных

волн, и поэтому необходимо получить дисперсионные уравнения одновременно для TE- и TM-волн, существующих в волноводах со сплошными диафрагмами.

Записывая выражения для TE- и TM-волн и сшивая их тангенциальные составляющие на границе раздела воздух — диэлектрик, нетрудно получить следующие дисперсионные уравнения:

$$\cos k_3 L = \cos p_1 L_1 \cos p_2 L_2 - \frac{\varepsilon^2 p_1^2 + p_2^2}{2\varepsilon p_1 p_2} \sin p_1 L_1 \sin p_2 L_2 \quad (TM). \tag{1}$$

$$\cos k_3 L = \cos p_1 L_1 \cos p_2 L_2 - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2 p_1 p_2} \sin p_1 L_1 \sin p_2 L_2 \quad (TE), \tag{2}$$

где

$$k_3 = \frac{\omega}{v_\Phi} = \frac{2\pi}{\lambda_z};$$

$$L = L_1 + L_2;$$

$$p_1^2 = k^2 - \Gamma^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2;$$

$$p_2^2 = \varepsilon k^2 - \Gamma^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2.$$

Эти уравнения определяют дисперсионные свойства рассматриваемой системы со сплошными диафрагмами. В случае тонких и часто расположенных диафрагм ($p_1 L_1 \ll 1$, $p_2 L_2 \ll 1$) уравнения сводятся к следующим:

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (\Gamma^e)^2 = \frac{\varepsilon (L_1 + L_2)}{\varepsilon L_1 + L_2} k^2 - \frac{\varepsilon (L_1 + L_2)^2}{(L_1 + \varepsilon L_2)(\varepsilon L_1 + L_2)} k_3^2, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (\Gamma^m)^2 = \frac{\varepsilon (L_1 + L_2)}{\varepsilon L_1 + L_2} k^2 - \frac{L_1 + L_2}{L_1 + \varepsilon L_2} k_3^2, \tag{4}$$

где Γ^e и Γ^m — поперечные волновые числа для TM- и TE-волн в направлении y.

Из (3), (4) видно, что в этом случае система без отверстий эквивалентна системе, заполненной анизотропным диэлектриком с $\varepsilon_x = \varepsilon_y = (L_1 + \varepsilon L_2)/(L_1 + L_2)$ и $\varepsilon_z = \varepsilon (L_1 + L_2)/(\varepsilon L_1 + L_2)$. В общем же случае связь между составляющими волнового вектора может быть найдена из решения трансцендентных уравнений (1) и (2). Подробнее об этом сказано ниже.

Составляющие поля для TM- и TE-волн можно получить аналогичным образом, поэтому мы их здесь не выписываем.

Рассмотрим теперь волновод, у которого диэлектрические диафрагмы имеют центральные отверстия для пролета пучка. Наличие отверстий приводит к тому, что при учете только одной TE- или TM-волны невозможно удовлетворить граничным условиям, что означает, что в такой системе могут существовать только гибридные волны. Воспользовавшись тем, что составляющие поля гибридной волны можно выразить через электрический и магнитный векторы Герца

$$\vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}_e - \Delta \vec{\Pi}_e + ik \operatorname{rot} \vec{\Pi}_m, \tag{5}$$

$$\vec{H} = -i\varepsilon k \operatorname{rot} \vec{\Pi}_e + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}_m - \Delta \vec{\Pi}_m \tag{6}$$

и предполагая, как обычно, что векторы $\vec{\Pi}_e$ и $\vec{\Pi}_m$ имеют только z-составляющую, окончательно получаем следующие выражения для составляю-

щих синфазной гибридной волны в пространстве взаимодействия $\left(0 \leqslant |y| \leqslant \left|\frac{b}{2} - h\right|\right)$:

$$E_x = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} k_{y,s}y\,(-i\beta_s Q_s^{(1)}A_s + Q_s^{(2)}B_s)\,e^{i\beta_s z},$$

$$E_y = \cos\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} \operatorname{sh} k_{y,s}y\,(i\beta_s Q_s^{(3)}A_s - Q_s^{(4)}B_s)\,e^{i\beta_s z},$$

$$E_z = \cos\frac{\pi}{2}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} k_{y,s}yA_s e^{i\beta_s z},$$

$$H_x = \cos\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} \operatorname{sh} k_{y,s}y\,(-Q_s^{(2)}A_s + i\beta_s Q_s^{(1)}B_s)\,e^{i\beta_s z}, \qquad (7)$$

$$H_y = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} k_{y,s}y\,(-Q_s^{(4)}A_s + i\beta_s Q_s^{(3)}B_s)\,e^{i\beta_s z},$$

$$H_z = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} \operatorname{sh} k_{y,s}y\,B_s e^{i\beta_s z}.$$

Здесь

$$Q_s^{(1)} = \frac{\frac{\pi}{a}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k_{y,s}^2}; \qquad Q_s^{(2)} = \frac{ikk_{y,s}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k_{y,s}^2};$$

$$Q_s^{(3)} = \frac{k_{y,s}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k_{y,s}^2}; \qquad Q_s^{(4)} = \frac{ik\frac{\pi}{a}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k_{y,s}^2}; \qquad (8)$$

$$-k_{y,s}^2 = k^2 - \beta_s^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2;$$

β_s — постоянная распространения s-й пространственной гармоники, связанная с основной гармоникой соотношением

$$\beta_s = \beta_0 + \frac{2\pi s}{L}.$$

Для второй области $\left(\left|\frac{b}{2} - h\right| \leqslant |y| \leqslant \left|\frac{b}{2}\right|\right)$, используя выражения для составляющих TE- и TM-волн в системе без отверстий, нетрудно получить следующие выражения для составляющих поля гибридной волны:

$$E_x = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[-R_r^{e(1)}a_r \operatorname{sh}\Gamma_r^e\left(y - \frac{b}{2}\right)\frac{dW_r^e}{dz} + R_r^{m(2)}b_r \operatorname{sh}\Gamma_r^m\left(y - \frac{b}{2}\right)W_r^m\right],$$

$$E_y = \cos\frac{\pi}{a}x \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[R_r^{e(3)}a_r \operatorname{ch}\Gamma_r^e\left(y - \frac{b}{2}\right)\frac{dW_r^e}{dz} - R_r^{m(4)}b_r \operatorname{ch}\Gamma_r^m\left(y - \frac{b}{2}\right)W_r^m\right],$$

$$E_z = \cos\frac{\pi}{a}x \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r \operatorname{sh}\Gamma_r^e\left(y - \frac{b}{2}\right)W_r^e, \qquad (9$$

$$H_x = \cos\frac{\pi}{a}x \sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[-\varepsilon R_r^{e(2)} a_r \operatorname{ch}\Gamma_r^e\left(y-\frac{b}{2}\right)W_r^e + R_r^{m(1)} b_r \operatorname{ch}\Gamma_r^m\left(y-\frac{b}{2}\right)\frac{dW_r^m}{dz}\right],$$

$$H_y = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[-\varepsilon R_r^{e(4)} a_r \operatorname{sh}\Gamma_r^e\left(y-\frac{b}{2}\right)W_r^e + R_r^{m(3)} b_r \operatorname{sh}\Gamma_r^m\left(y-\frac{b}{2}\right)\frac{dW_r^m}{dz}\right],$$

$$H_z = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r \operatorname{ch}\Gamma_r^m\left(y-\frac{b}{2}\right)W_r^m,$$

где Γ_r^e и Γ_r^m — корни уравнений для TE- и TM-волн при заданном k_3;

$$R_r^{e(1)} = \frac{\frac{\pi}{a}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (\Gamma_r^e)^2}; \qquad R_r^{e(2)} = \frac{ik\Gamma_r^e}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (\Gamma_r^e)^2};$$

$$R_r^{e(3)} = \frac{\Gamma_r^e}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (\Gamma_r^e)^2}; \qquad R_r^{e(4)} = \frac{ik\frac{\pi}{a}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (\Gamma_r^e)^2} \tag{10}$$

(выражения для $R_r^{m(1)} - R_r^{m(4)}$ могут быть получены заменой Γ_r^e на Γ_r^m):

$$W^e(z) = u_1^e(z) - \frac{u_1^e(L) - e^{i\psi}}{u_2^e(L)} u_2^e(z); \tag{11}$$

функции u_1^e и u_2^e являются решениями уравнения

$$\frac{d^2u^e(z)}{dz^2} + \left[\varepsilon k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (\Gamma^e)^2\right]u^e(z) = 0. \tag{12}$$

При $\varepsilon = 1$ для $0 \leqslant z \leqslant L_1$ и $\varepsilon = \varepsilon$ для $L_1 \leqslant z \leqslant L_1 + L_2$ они удовлетворяют начальным условиям

$$u_1^e(0) = 1; \quad \frac{1}{\varepsilon}\frac{du_1^e(0)}{dz} = 0; \quad u_2^e(0) = 0; \frac{1}{\varepsilon}\frac{du_2^e(0)}{dz} = 1 \tag{13}$$

имеют следующий вид:

$$u_1^e(z) = \cos p_1 z \quad \text{при } 0 \leqslant z \leqslant L_1,$$

$$u_1^e(z) = \frac{1}{\varepsilon}\cos p_1 L_1 \cos p_2(z - L_1) - \frac{p_1}{p_2}\sin p_1 L_1 \sin p_2(z - L_1)$$
$$\text{при } L_1 \leqslant z \leqslant L_1 + L_2; \tag{14}$$

$$u_e^2(z) = \frac{1}{p_1}\sin p_1 z \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant L_1,$$

$$u_2^e(z) = \frac{1}{\varepsilon p_1}\sin p_1 L_1 \cos p_2(z - L_1) + \frac{1}{p_2}\cos p_1 L_1 \sin p_2(z - L_1)$$
$$\text{при } L_1 \leqslant z \leqslant L_1 + L_2 \tag{15}$$

(формулы для u_1^m и u_2^m могут быть получены, если в выражениях для u_1^e и u_2^e всюду, исключая p_2, положить $\varepsilon = 1$).

Разлагая W_r^e и W_r^m и их производные в ряд по пространственным гармоникам, окончательно получаем следующие выражения для состав-

ляющих поля во второй области:

$$E_x = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\beta_s z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Big[- R_r^{e\,(1)} a_r \operatorname{sh}\Gamma_r^e \Big(y - \frac{b}{2}\Big) T_{r,s}^e + \\ + R_r^{m\,(2)} b_r \operatorname{sh}\Gamma_r^m \Big(y - \frac{b}{2}\Big) S_{r,s}^m \Big],$$

$$E_y = \cos\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\beta_s z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Big[R_r^{e\,(3)} a_r \operatorname{ch}\Gamma_r^e \Big(y - \frac{b}{2}\Big) T_{r,s}^e - \\ - R_r^{m\,(4)} b_r \operatorname{ch}\Gamma_r^m \Big(y - \frac{b}{2}\Big) S_{r,s}^m \Big],$$

$$E_z = \cos\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\beta_s z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r \operatorname{sh}\Gamma_r^e \Big(y - \frac{b}{2}\Big) S_{r,s}^e,$$

$$H_x = \cos\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\beta_s z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Big[- R_r^{e\,(2)} a_r \operatorname{ch}\Gamma_r^e \Big(y - \frac{b}{2}\Big) \widetilde{S}_{r,s}^e + \\ + R_r^{m\,(1)} b_r \operatorname{ch}\Gamma_r^m \Big(y - \frac{b}{2}\Big) T_{r,s}^m \Big], \tag{16}$$

$$H_y = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\beta_s z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Big[- R_r^{e\,(4)} a_r \operatorname{sh}\Gamma_s^e \Big(y - \frac{b}{2}\Big) \widetilde{S}_{r,s}^e + \\ + R_r^{m\,(3)} b_r \operatorname{sh}\Gamma_r^m \Big(y - \frac{b}{2}\Big) T_{r,s}^m \Big],$$

$$H_z = \sin\frac{\pi}{a}x \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\beta_s z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r \operatorname{ch}\Gamma_r^m \Big(y - \frac{b}{2}\Big) S_{r,s}^m,$$

где

$$S_{r,s}^e = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-i\beta_s z} W_r^e(z)\, dz = \frac{1}{L}\left(S_{r,s}^{e\,(1)} + S_{r,s}^{e\,(2)}\right); \tag{17}$$

$$\widetilde{S}_{r,s}^e = \frac{1}{L}\int_0^L \varepsilon e^{-i\beta_s z} W_r^e(z)\, dz = \frac{1}{L}\left(S_{r,s}^{e\,(1)} + \varepsilon S_{r,s}^{e\,(2)}\right); \tag{18}$$

$$T_{r,s}^e = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-i\beta_s z} \frac{dW_r^e(z)}{dz}\, dz = \frac{1}{L}\left(T_{r,s}^{e\,(1)} + T_{r,s}^{e\,(2)}\right); \tag{19}$$

$$S_{r,s}^{e\,(1)} = -\frac{1}{p_1^2 - \beta_s^2}\left\{e^{-i\beta_s L_1}\left[i\beta_s W_r^e(L_1) + \frac{dW_r^e(L_1)}{dz}\right] - \left[i\beta_s W_r^e(0) + \frac{dW_r^e(0)}{dz}\right]\right\}; \tag{20}$$

$$S_{r,s}^{e\,(2)} = -\frac{1}{p_2^2 - \beta_s^2}\left\{e^{-i\beta_s L}\left[i\beta_s W_r^e(L) + \frac{dW_r^e(L)}{dz}\right] - e^{-i\beta_s L_1}\left[i\beta_s W_r^e(L_1) + \frac{dW_r^e(L_1)}{dz}\right]\right\}; \tag{21}$$

$$T_{r,s}^{e\,(1)} = -\frac{1}{p_1^2 - \beta_s^2}\left\{e^{-i\beta_s L_1}\left[i\beta_s \frac{dW_r^e(L_1)}{dz} - p_1^2 W_r^e(L_1)\right] - \right. \\ \left. - \left[i\beta_s \frac{dW_r^e(0)}{dz} - p_1^2 W_r^e(0)\right]\right\}; \tag{22}$$

$$T^{e\,(2)}_{r,s} = -\frac{1}{p_2^2-\beta_s^2}\left\{e^{-i\beta_s L}\left[i\beta_s\frac{dW^e_r(L)}{dz} - p_1^2 W^e_r(L)\right] - \right.$$

$$\left. - e^{-i\beta_s L_1}\left[i\beta_s\frac{dW^e_r(L_1)}{dz} - p_1^2 W^e_r(L_1)\right]\right\}. \qquad (23)$$

Выражения для $S^m_{r,s}$ и $T^m_{r,s}$ могут быть получены, если в выражениях (17) — (23) заменить W^e_r и dW^e_r/dz на W^m_r и dW^m_r/dz.

Приравнивая соответствующие гармоники тангенциальных составляющих поля (7) и (16) при $y = y_0 = \frac{b}{2} - h$ и исключая A_s и B_s, получаем следующие две бесконечные системы линейных относительно a_r и b_r уравнений, определяющие дисперсионные свойства синфазных волн прямоугольного волновода с диэлектрическими диафрагмами:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r\,[Q^{(2)}_s S^e_{r,s}\,\mathrm{th}\,k_{y,s}\,y_0\,\mathrm{sh}\,\Gamma^e_r h + R^{e\,(2)}_r \widetilde{S}^e_{r,s}\,\mathrm{ch}\,\Gamma^e_r h] +$$

$$+ b_r\,[i\beta_s Q^{(1)}_s S^m_{r,s}\,\mathrm{ch}\,\Gamma^m_r h - R^{m\,(1)}_r T^m_{r,s}\,\mathrm{ch}\,\Gamma^m_r h] = 0, \qquad (24)$$

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r\,[i\beta_s Q^{(1)}_s S^e_{r,s}\,\mathrm{sh}\,\Gamma^e_r h - R^{e\,(1)}_r T^e_{r,s}\,\mathrm{sh}\,\Gamma^e_r h] +$$

$$+ b_r\,[Q^{(2)}_s S^m_{r,s}\ \mathrm{cth}\,k_{y,s}\,y_0\,\mathrm{ch}\,\Gamma^m_r h + R^{m\,(2)}_r S^m_{r,s}\,\mathrm{sh}\,\Gamma^m_r h] = 0.$$

Здесь s пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Условием разрешимости системы является равенство нулю ее определителя. Порядок определителя в данном случае растет очень быстро (при учете прямой и обратной первых гармоник имеем определитель шестого порядка), поэтому исследовать дисперсионные свойства рассматриваемой замедляющей системы, исходя из (24), довольно трудно. В связи с этим представляет интерес получение приближенных уравнений. Если считать, что распределение поля во второй области $\left(\left|\frac{b}{2}-h\right| \leqslant |y| \leqslant \left|\frac{b}{2}\right|\right)$ достаточно точно описывается функциями W^e_0 и W^m_0 и их производными (т. е. если не учитывать суммирование по r), то высшие пространственные гармоники могут быть учтены при помощи приближенного метода сшивания частичных мощностей, предложенного Л. А. Вайнштейном [4]. Сущность этого метода заключается в том, что вместо точного сшивания, которое в данном случае весьма затруднительно, мы вычисляем частичные мощности для I и II областей на период структуры L и сшиваем их на границе раздела:

$$p_1^{\mathrm{I}} = p_1^{\mathrm{II}},\quad p_2^{\mathrm{I}} = p_2^{\mathrm{II}},$$

где

$$p_1 = \frac{c}{8\pi}\int_0^L E_z^* H_x dz;$$

$$p_2 = \frac{c}{8\pi}\int_0^L E_x^* H_z\,dz. \qquad (25)$$

Проделывая это, окончательно получаем следующее дисперсионное

уравнение рассматриваемой системы:

$$\frac{\sum_{s=-\infty}^{\infty} [Q_s^{(2)} S_{0,s}^e (S_{0,s}^e)^* \operatorname{sh}^2 \Gamma_0^e h \operatorname{th} k_{y,s} y_0 + R_0^{e(2)} S_{0,s}^e (\widetilde{S}_{0,s}^e)^* \operatorname{sh} \Gamma_0^e h \operatorname{ch} \Gamma_0^e h]}{\sum_{s=-\infty}^{\infty} [i\beta_s Q_s^{(1)} S_{0,s}^m (S_{0,s}^e)^* \operatorname{sh} \Gamma_0^e h \operatorname{ch} \Gamma_0^m h - R_0^{m(1)} T_{0,s}^m (S_{0,s}^e)^* \operatorname{sh} \Gamma_0^e h \operatorname{ch} \Gamma_0^m h]} = \tag{26}$$

$$= \frac{\sum_{s=-\infty}^{\infty} [-i\beta_s Q_s^{(1)} (S_{0,s}^m)^* S_{0,s}^e \operatorname{sh} \Gamma_0^e h \operatorname{ch} \Gamma_0^m h + R_0^{e(1)} (S_{0,s}^m)^* T_{0,s}^e \operatorname{sh} \Gamma_0^e h \operatorname{ch} \Gamma_0^m h]}{\sum_{s=-\infty}^{\infty} [(Q_s^{(2)})^* S_{0,s}^m (S_{0,s}^m)^* \operatorname{ch}^2 \Gamma_0^m h \operatorname{cth} k_{y,s} y_0 + (R_0^{m(2)})^* S_{0,s}^m (S_{0,s}^m)^* \operatorname{sh} \Gamma_0^m h \operatorname{ch} \Gamma_0^m h]}.$$

Из этого уравнения видно, что оно содержит два решения, одно из которых описывает дисперсионные свойства волны, близкой к TE-волне (квазиTE-волна), а второе — дисперсионные свойства квазиTM-волны. Большой интерес, по-видимому, представляет квазиTM-волна. В частном случае, не реализующемся на практике ($\partial/\partial x = 0$), оно распадается на два независимых уравнения.

Дальнейшее упрощение может быть получено, если и в I и во II областях учитывать только нулевую пространственную гармонику. В этом случае получаем следующее уравнение второго порядка:

$$R_0^{e(2)} Q_0^{(2)} \widetilde{S}_{0,0}^e S_{0,0}^m \operatorname{cth}^2 k_{y,0} y_0 + R_0^{m(2)} Q_0^{(2)} S_{0,0}^e S_{0,0}^m \operatorname{th} \Gamma_0^e h \operatorname{th} \Gamma_0^m h +$$
$$+ \operatorname{cth} k_{y,0} y_0 \{R_0^{e(2)} R_0^{m(2)} \widetilde{S}_{0,0}^e S_{0,0}^m \operatorname{th} \Gamma_0^m h + [Q_0^{(2)} Q_0^{(2)} S_{0,0}^e S_{0,0}^m +$$
$$+ \beta_0^2 Q_0^{(1)} Q_0^{(1)} S_{0,0}^e S_{0,0}^m - i\beta_0 Q_0^{(1)} R_0^{m(1)} T_{0,0}^m S_{0,0}^e + i\beta_0 Q_0^{(1)} R_0^{e(1)} T_{0,0}^e S_{0,0}^m +$$
$$+ R_0^{m(1)} R_0^{e(1)} T_{0,0}^m T_{0,0}^e] \operatorname{th} \Gamma_0^e h\} = 0, \tag{27}$$

разрешив которое относительно $\operatorname{cth} k_{y,0} y_0$, получим дисперсионные уравнения для симметричных квазиTE- и квазиTM-волн.

Вычисление по этим уравнениям можно проводить следующим образом: фиксируя размеры волновода, толщину и проницаемость диэлектрика, а также расстояние между диафрагмами, по уравнениям (1) и (2) строим семейства кривых, характеризующих зависимость k_3 от Γ^e и Γ^m при различных k. Выбирая необходимое k_3 и определяя из полученных графиков значения Γ^e и Γ^m, которые соответствуют выбранному k, можно определить то значение высоты диафрагмы h, ири котором квазиTE- или квазиTM-волна будет распространяться с необходимой фазовой скоростью.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. B. R. Shersby-Harvie, L. B. Mullet, W. Walk inchaw S. Bell, G. Loach, Proc. I. E. E., 1957, **104B**, 273.
2. Н. А. Хижняк, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 3, 413.
3. А. Н. Диденко, Е. С. Коваленко, Атомная энергия, 1961, **10**, 1, 69.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957

Поступила в редакцию
21 I 1961

1961 № 10

О МЕТОДЕ РИТЦА ДЛЯ ПОЛЫХ СИСТЕМ С АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ

В. В. Никольский, В. Г. Сухов

В методе Ритца для волноводов и резонаторов с неоднородной анизотропной средой (тензоры проницаемостей неэрмитовы) в качестве координатных функций используются полные системы собственных функций, соответствующих полям незаполненных волноводов и резонаторов.

ВВЕДЕНИЕ

Цель данной работы — получить для волноводов и резонаторов с анизотропным заполнением результаты последовательного применения метода Ритца. Под этим имеется в виду прежде всего использование систем координатных функций, обладающих свойством полноты. Естественно брать системы собственных функций, соответствующих полям пустых (заполненных однородной изотропной средой) резонаторов и волноводов. Такой путь интересен в значительной мере тем, что должно выявиться соответствие с результатами прямого разложения полей по собственным функциям [1, 2]. Ниже показано, что при надлежащем согласовании в постановках задач (выбор типа разложений и формы вариационного принципа) метод Ритца приводит к тем же в точности результатам, что и прямое разложение полей. Установленная таким путем эквивалентность обоих методов может оказаться полезной для различных оценок. Помимо этого факта заслуживает внимания наглядность схемы Ритца применительно к рассматриваемым задачам. Благодаря этому, например для волновода, кроме уже известных [2] результатов, полученных теперь в более обозримой форме, найдены новые результаты, более удобные для вычислений.

1. ЗАДАЧА О РЕЗОНАТОРЕ

Будем рассматривать полый электромагнитный резонатор с неоднородной анизотропной средой (т. е. практически содержащий анизотропное тело, например намагниченный феррит). Исходя из вариационного соотношения

$$\omega^2 = \frac{\int\limits_V \widetilde{\vec{D}}\,\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\varepsilon^{-1}\,\vec{D}\,dv}{\int\limits_V \widetilde{\vec{D}}\vec{D}\,dv} \tag{1}$$

формула (8б) из [3]), построим схему Ритца на координатных функциях $\vec{E}_n$, соответствующих свободным колебаниям пустой полости. Взяв таким образом разложения

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \sum_n a_n \vec{E}_n, \quad \widetilde{\vec{D}} = \varepsilon_0 \sum_n \widetilde{a}_n \vec{E}_n^*, \tag{2}$$

внесем их в исходную формулировку (1). Подстановка приводит к следующему выражению ω^2 через билинейные формы:

$$\omega^2 = \frac{(\widetilde{a},\, \mathfrak{E}a)}{(\widetilde{a},\, a)}, \tag{3}$$

где $a = \{a_n\}$; $\tilde{a} = \{\tilde{a}_n\}$ — векторы, образованные коэффициентами из (2), причем $\vec{E}_n$ ортонормированы как в [1]; круглые же скобки означают:

$$(\tilde{a},\ a) = \sum_n \tilde{a}_n a_n,\ (\tilde{a},\ \mathfrak{E}a) = \sum_{k,\ n} \tilde{a}_k \mathfrak{E}_{kn} a_n$$

при

$$\mathfrak{E}_{kn} = \varepsilon_0 \int_V \vec{E}_k^* \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \vec{E}_n\, dv.$$

Составляя по методу Ритца производные

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{a}_n} \{(\tilde{a},\ \mathfrak{E}a) - \omega^2 (\tilde{a},\ a)\},\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

и приравнивая их нулю, получаем систему уравнений, эквивалентную записи

$$\mathfrak{E}a = \omega^2 a. \tag{5}$$

Этот результат в точности совпадает с тем, что имеется в «замечаниях при корректуре» к статье [2] (п. 1). Совершенно так же из вариационного соотношения, содержащего магнитную индукцию $\vec{B}$, получается там же имеющийся результат

$$\mathfrak{M}b = \omega^2 b, \tag{6}$$

где $b = \{b_n\}$ (b_n — коэффициенты разложения $\vec{B}$ по собственным функциям $\vec{H}_n$) и

$$\mathfrak{M}_{kn} = \mu_0 \int_V \vec{H}_k^* \operatorname{rot}\ \varepsilon^{-1} \operatorname{rot}\ \mu^{-1} \vec{H}_n\, dv.$$

Что касается результатов работы [1], то они могут быть получены из вариационного принципа в форме

$$\omega = j \frac{\int_V \left(\tilde{\vec{H}} \operatorname{rot} \vec{E} - \tilde{\vec{E}} \operatorname{rot} \vec{H}\right) dv}{\int_V \left(\tilde{\vec{H}} \mu \vec{H} + \tilde{\vec{E}} \varepsilon \vec{E}\right) dv} \tag{7}$$

(формула (2) из [3]). Для применения метода Ритца запишем, например, разложения:

$$\begin{aligned} \varepsilon \vec{E} &= \varepsilon_0 \sum_n a_n \vec{E}_n, \\ \tilde{\vec{E}} &= \sum_n \tilde{a}_n \vec{E}_n^* + \sum_{n'} a_{n'} \vec{E}_{n'}^*; \\ \mu \vec{H} &= \mu_0 \sum_n b_n \vec{H}_n, \\ \tilde{\vec{H}} &= \sum_n \tilde{b}_n \vec{H}_n^* + \sum_{n'} \tilde{b}_{n'} \vec{H}_{n'}^*, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\vec{E}_n$ и $\vec{H}_n$ — по-прежнему вихревые собственные функции полости V, а $\vec{E}_{n'}$ и $\vec{H}_{n'}$ — соответствующие потенциальные собственные функции. Далее введены, как уже делалось, векторы $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$, $\tilde{a} = \{\tilde{a}_n\}$, $\tilde{a}' = \{\tilde{a}_{n'}\}$, $\tilde{b} = \{\tilde{b}_n\}$ и $\tilde{b}' = \{\tilde{b}_{n'}\}$. Внося (8) в вариационное соотношение (7),

приводим его к виду

$$\omega = \frac{(\tilde{a},\ \Omega\mathcal{E}a) + (\tilde{b},\ \Omega M b)}{(\tilde{a},\ a) + (\tilde{b},\ b)}, \tag{9}$$

де $\Omega = [\omega_n]$ — диагональная матрица, образованная собственными частотами пустого резонатора ω_n, а элементы матриц $\mathcal{E}$ и M — интегралы

$$\mathcal{E}_{kn} = \varepsilon_0 \int_V \vec{E}_k^* \varepsilon_0 \varepsilon^{-1} \vec{E}_n\, dv \quad \text{и} \quad M_{kn} = \mu_0 \int_V \vec{H}_k^* \mu_0 \mu^{-1} \vec{H}_n\, dv.$$

Затем по схеме Ритца

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{a}_n}\{(\tilde{a},\ \Omega\mathcal{E}a) + (\tilde{b},\ \Omega M b) - \omega\,(\tilde{b}, b) - \omega\,(\tilde{a},\ a)\} = 0$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{b}_n}\{(\tilde{a},\ \Omega\mathcal{E}a) + (\tilde{b},\ \Omega M b) - \omega\,(\tilde{b},\ b) - \omega\,(\tilde{a},\ a)\} = 0$$

отсюда вытекают матричные уравнения

$$\begin{aligned} \Omega\mathcal{E}a &= \omega b, \\ \Omega M b &= \omega a. \end{aligned} \tag{11}$$

Исключая поочередно a и b, находим окончательно

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}a &= \omega^2 a, \\ \mathfrak{M}b &= \omega^2 b, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \Omega M \Omega \mathcal{E}; \\ \mathfrak{M} &= \Omega \mathcal{E} \Omega M. \end{aligned}$$

Уравнения (11) и (12) совпадают с полученными в работе [1] (формулы (9″) и (10′)). Здесь лишь несколько упрощена символика благодаря тому, что интегралы матричных элементов $\mathcal{E}_{kn}$ и M_{kn} записаны для полного объема резонатора: область возмущения не выделена.

Обратные формулировки вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^{-1} a &= \omega^{-2} a, \\ \mathfrak{M}^{-1} b &= \omega^{-2} b \end{aligned} \tag{13}$$

также находятся из (7), если пользоваться только разложениями напряженностей. Отметим, что по сравнению с формулами (18) работы [1] возникают известные упрощения, когда учитываются свойства расходимостей $\operatorname{div} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{E}$ и $\operatorname{div} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \vec{H}$.

2. ЗАДАЧА О ВОЛНОВОДЕ (РАЗЛОЖЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТЕЙ)

В качестве удобной формулировки вариационного принципа для волновода с анизотропным продольно-однородным заполнением запишем выражение

$$\Gamma = \frac{\omega \int\limits_{S_\perp} \left(\tilde{\vec{E}}\varepsilon\vec{E} + \tilde{\vec{H}}\mu\vec{H}\right) ds - j \int\limits_{S_\perp} \left(\tilde{\vec{H}} \operatorname{rot}_\perp \vec{E} - \tilde{\vec{E}} \operatorname{rot}_\perp \vec{H}\right) ds}{\int\limits_{S_\perp} \left\{[\vec{E}, \tilde{\vec{H}}] + [\tilde{\vec{E}}, \vec{H}]\right\} \vec{ds}} \tag{14}$$

(формула (10) из [3]).

Не ставя себе в данном случае целью получение уже известных результатов, будем исходить из разложений напряженностей. Используя

в дальнейшем обозначения и нормировку * из [2], возьмем

$$\vec{E} = \sum_m (a_{zm}\vec{E}_{zm} + a_{\perp m}\vec{E}_{\perp m}) + \sum_n a_{\perp' n}\vec{E}_{\perp' n},$$
$$\vec{\widetilde{E}} = \sum_m (\widetilde{a}_{zm}\vec{E}^*_{zm} + \widetilde{a}_{\perp m}\vec{E}^*_{\perp m}) + \sum_n \widetilde{a}_{\perp' n}\vec{E}^*_{\perp' n}; \qquad (15')$$
$$\vec{H} = \sum_n (b_{zn}\vec{H}_{zn} + b_{\perp n}\vec{H}_{\perp n}) + \sum_m b_{\perp' m}\vec{H}_{\perp' m},$$
$$\vec{\widetilde{H}} = \sum_n (\widetilde{b}_{zn}\vec{H}^*_{zn} + \widetilde{b}_{\perp n}\vec{H}^*_{\perp n}) + \sum_m \widetilde{b}_{\perp' m}\vec{H}^*_{\perp' m}. \qquad (15'')$$

Соответственно разложениям (15) вводятся векторы a, $\widetilde{a}$, b и $\widetilde{b}$, каждый из которых образован всеми коэффициентами одной из строчек (15), так что, например, a есть объединение векторов $a_z = \{a_{zm}\}$, $a_\perp = \{a_{\perp m}\}$ и $a_{\perp'} = \{a_{\perp' n}\}$. Подстановка взятых разложений в (14) дает

$$\Gamma = \frac{(\widetilde{a},\ \mathcal{A}a) + (\widetilde{b},\ Mb) - (\widetilde{b},\ X^2 a) - (\widetilde{a},\ X^2 b)}{(\widetilde{a},\ \mathring{\Gamma} b) + (\widetilde{b},\ \mathring{\Gamma} a)}. \qquad (16)$$

Круглые скобки означают здесь билинейные формы, как и раньше. Что же касается фигурирующих в (16) операторов, то их удобно разбить на клетки по схеме

$$\begin{Vmatrix} zz & z\perp & z\perp' \\ \perp z & \perp\perp & \perp\perp' \\ \perp' z & \perp'\perp & \perp'\perp' \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_{zz} & \mathcal{A}_{z\perp} & \mathcal{A}_{z\perp'} \\ \mathcal{A}_{\perp z} & \mathcal{A}_{\perp\perp} & \mathcal{A}_{\perp\perp'} \\ \mathcal{A}_{\perp' z} & \mathcal{A}_{\perp'\perp} & \mathcal{A}_{\perp'\perp'} \end{Vmatrix}, \qquad M = \begin{Vmatrix} M_{zz} & M_{z\perp} & M_{z\perp'} \\ M_{\perp z} & M_{\perp\perp} & M_{\perp\perp'} \\ M_{\perp' z} & M_{\perp'\perp} & M_{\perp'\perp'} \end{Vmatrix},$$

где

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \left\| \int_{S_\perp} \vec{E}^*_{\alpha k} \varepsilon \vec{E}_{\beta n}\, ds \right\|; \quad M_{\alpha\beta} = \left\| \int_{S_\perp} \vec{H}^*_{\alpha k} \mu \vec{H}_{\beta n}\, ds \right\| \quad (\alpha, \beta = z, \perp, \perp')$$

и

$$X^2 = \frac{1}{k_0^2} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & [\chi_n^2] \\ 0 & 0 & 0 \\ [\chi_n^2] & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \mathring{\Gamma} = \frac{1}{k_0^2} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\Gamma_n] \\ 0 & [\Gamma_n] & 0 \end{Vmatrix};$$

$[\chi_n^2]$ и $[\Gamma_n]$ — диагональные матрицы, образованные поперечными и продольными волновыми числами различных волн пустого волновода (обозначения из [2]!).

Пусть M — числитель и N — знаменатель правой части (16). По методу Ритца

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{a}_{\alpha n}}(M - \Gamma N) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{b}_{\alpha n}}(M - \Gamma N) = 0 \qquad (\alpha = z, \perp, \perp';\ n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (17)$$

* Отметим, что изменение нормировки (именно нормировка к единице поперечных функций) при изменении обозначения поперечных полей (например, индекс $\perp$ для H-полей и $\perp'$ для E-полей) приносит некоторые упрощения записи.

а отсюда возникают две системы уравнений, в матричной форме имеющие вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Э}a - X^2 b &= \Gamma\mathring{\Gamma}b, \\ Mb - X^2 a &= \Gamma\mathring{\Gamma}a. \end{aligned} \tag{18}$$

Исключая поочередно b и a, имеем

$$\begin{aligned} a &= \mathcal{Э}^{-1}(\Gamma\mathring{\Gamma} + X^2)\, M^{-1}(\Gamma\mathring{\Gamma} + X^2)\, a, \\ b &= M^{-1}(\Gamma\mathring{\Gamma} + X^2)\, \mathcal{Э}^{-1}(\Gamma\mathring{\Gamma} + X^2)\, b. \end{aligned} \tag{19}$$

Уравнение относительно неизвестной постоянной распространения Γ (так называемое «дисперсионное уравнение») получается обращением в нуль соответствующего определителя:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Det}\,|\,\mathcal{Э} - (\Gamma\mathring{\Gamma} + X^2)\, M^{-1}\, (\Gamma\mathring{\Gamma} + X^2)| = 0, \\ &\mathrm{Det}\,|\,M - (\Gamma\mathring{\Gamma} + X^2)\, \mathcal{Э}^{-1}(\Gamma\mathring{\Gamma} + X^2)\,| = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Особенно наглядная формулировка достигается объединением векторов a и b в новый вектор $c = \{a, b\}$ и, соответственно, введением оператора «полной энергии» W так, что $Wc = \{\mathcal{Э}a, Mb\}$ *. Тогда объединение уравнений (18)

$$\begin{Vmatrix} \mathcal{Э} & 0 \\ 0 & M \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & X^2 \\ X^2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \Gamma \begin{Vmatrix} 0 & \check{\Gamma} \\ \mathring{\Gamma} & 0 \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{18а}$$

естественно выглядит как

$$(W - \check{X}^2)\, c = \Gamma\check{\Gamma}c \tag{21}$$

(смысл операторов $\check{X}^2$ и $\check{\Gamma}$ ясен из (18а)), и дисперсионное уравнение принимает вид

$$\mathrm{Det}\,|\,W - \check{X}^2 - \Gamma\check{\Gamma}\,| = 0, \tag{22}$$

очень напоминающий элементарное дисперсионное соотношение

$$k_0^2 - \chi^2 - \Gamma^2 = 0.$$

Легко видеть, что при $\varepsilon = I\varepsilon_0$ и $\mu = I\mu_0$ (I — единичный тензор) уравнение (22) распадается на ряд таких соотношений. Вообще уравнение (22) показывает, что величина $1/\Gamma$ пробегает собственные значения матрицы

$$(W - \check{X}^2)^{-1}\, \check{\Gamma}.$$

В качестве примера существенного упрощения окончательной формулировки (в результате чего значительно повышается ее вычислительная ценность) рассмотрим случай, когда тензоры проницаемостей имеют вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -j\varepsilon_2 & 0 \\ j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & -j\mu_2 & 0 \\ j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}$$

(z — продольна я ось волновода!). При этом в матрицах $\mathcal{Э}$ и M клетки $\perp z$, $\perp' z$, $z \perp$ и $z \perp'$ исчезают, так что из первых клеточных строчек (18) получается

$$\mathcal{Э}_{zz} a_z - \frac{[\chi_n^2]}{k_0^2} b_{\perp'} = 0, \quad M_{zz} b_z - \frac{[\chi_n^2]}{k_0^2} a_{\perp'} = 0, \tag{23}$$

* Эти же операции легко проводятся и для резонатора на основе (11).

а исключение a_z и b_z из вторых и третьих строчек дает

$$\mathcal{Э}'a' = \Gamma\mathring{\Gamma}b', \quad M'b' = \Gamma\mathring{\Gamma}a'. \tag{24}$$

В этой записи штрихи при векторах a и b означают, что их z-составляющие отброшены, а матрицы $\mathcal{Э}'$ и M' заданы следующим образом:

$$\mathcal{Э}' = \begin{Vmatrix} \mathcal{Э}_{\perp\perp} & \mathcal{Э}_{\perp\perp'} \\ \mathcal{Э}_{\perp'\perp} & \mathcal{Э}_{\perp'\perp'} - \frac{1}{k_0^4}[\chi_n^2]\, M_{zz}^{-1}\,[\chi_n^2] \end{Vmatrix},$$

$$M' = \begin{Vmatrix} M_{\perp\perp} & M_{\perp\perp'} \\ M_{\perp'\perp} & M_{\perp'\perp'} - \frac{1}{k_0^4}[\chi_n^2]\, \mathcal{Э}_{zz}^{-1}\,[\chi_n^2] \end{Vmatrix}.$$

При этом, как можно показать,

$$\frac{1}{k_0^4}[\chi_n^2]\, M_{zz}^{-1}\,[\chi_n^2] = \left\| \mu_0 \int\limits_{S_\perp} \vec{H}_{zk}^{*} \mu_0 \mu_z^{-1} \vec{H}_{zn}\, ds \right\|,$$

$$\frac{1}{k_0^4}[\chi_n^2]\, \mathcal{Э}_{zz}^{-1}\,[\chi_n^2] = \left\| \varepsilon_0 \int\limits_{S_\perp} \vec{E}_{zk}^{*} \varepsilon_0 \varepsilon_z^{-1} \vec{E}_{zn}\, ds \right\|.$$

Из (24) исключаются b' и a'. Получаемые в результате уравнения

$$\begin{aligned} \mathring{\Gamma}^{-1} M' \mathring{\Gamma}^{-1} \mathcal{Э}'\, a' &= \Gamma^2 a', \\ \mathring{\Gamma}^{-1}\, \mathcal{Э}' \mathring{\Gamma}^{-1} M' b' &= \Gamma^2 b', \end{aligned} \tag{25}$$

сводят определение Γ к нахождению собственных значений сравнительно простых матриц.

3. ЗАДАЧА О ВОЛНОВОДЕ (РАЗЛОЖЕНИЕ ИНДУКЦИЙ)

Найденные выше формулировки для волновода не совпадают с тем, что было получено в работе [2]. Однако вариационное соотношение (14) приводит к прежнему результату, если взять разложения

$$\varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0 \sum_m (a_{zm}\vec{E}_{zm} + a_{\perp m}\vec{E}_{\perp m}) + \varepsilon_0 \sum_n a_{\perp' n}\vec{E}_{\perp' n},$$

$$\widetilde{\vec{E}} = \sum_m (\widetilde{a}_{zm}\vec{E}_{zm}^{*} + \widetilde{a}_{\perp m}\vec{E}_{\perp m}^{*}) + \sum_n \widetilde{a}_{\perp' n}\vec{E}_{\perp' n}^{*}; \tag{26'}$$

$$\mu\vec{H} = \mu_0 \sum_n (b_{zn}\vec{H}_{zn} + b_{\perp n}\vec{H}_{\perp n}) + \mu_0 \sum_m b_{\perp' m}\vec{H}_{\perp' m},$$

$$\widetilde{\vec{H}} = \sum_n (\widetilde{b}_{zn}\vec{H}_{zn}^{*} + \widetilde{b}_{\perp n}\vec{H}_{\perp n}^{*}) + \sum_m \widetilde{b}_{\perp' m}\vec{H}_{\perp' m}^{*}. \tag{26''}$$

Тогда из (14) вытекает следующее выражение Γ через билинейные формы:

$$\Gamma = \frac{(\widetilde{a},\, Na) + (\widetilde{b},\, Nb) - (\widetilde{b},\, X^2\mathcal{Э}a) - (\widetilde{a},\, X^2 M b)}{(\widetilde{b},\, \mathring{\Gamma}\mathcal{Э}a) + (\widetilde{a},\, \mathring{\Gamma}Mb)}, \tag{27}$$

где в отличие от (16) клетки в матрицах $\mathcal{Э}$ и M имеют вид

$$\mathcal{Э}_{\alpha\beta} = \left\| \varepsilon_0 \int\limits_{S_\perp} \vec{E}_{\alpha k}^{*} \varepsilon^{-1} \varepsilon_0 \vec{E}_{\beta n}\, ds \right\|, \quad M_{\alpha\beta} = \left\| \mu_0 \int\limits_{S_\perp} \vec{H}_{\alpha k}^{*} \mu^{-1} \mu_0 \vec{H}_{\beta n}\, ds \right\| (\alpha, \beta = z, \perp, \perp');$$

матрицы X^2 и $\mathring{\Gamma}$ таковы:

$$X^2 = \frac{1}{k_0^2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & [\chi_n^2] \\ 0 & 0 & 0 \\ [k_0^2] & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathring{\Gamma} = \frac{1}{k_0^2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\Gamma_n] \\ 0 & k_0^2[\Gamma_n^{-1}] & 0 \end{Vmatrix},$$

и, кроме того, еще фигурирует матрица нормировки N:

$$N = \frac{1}{k_0^2}\begin{Vmatrix} [\chi_n^2] & 0 & 0 \\ 0 & [\Gamma_n^2] & 0 \\ 0 & 0 & [k_0^2] \end{Vmatrix}.$$

Из (27) при условии типа (17) находим

$$Na = (X^2 + \Gamma\mathring{\Gamma})\, Mb, \quad Nb = (X^2 + \Gamma\mathring{\Gamma})\, \mathcal{E}a, \tag{28}$$

и далее, исключая b и a:

$$\begin{aligned} N^{-1}(X^2 + \Gamma\mathring{\Gamma})\, MN^{-1}(X^2 + \Gamma\mathring{\Gamma})\, \mathcal{E}a = a, \\ N^{-1}(X^2 + \Gamma\mathring{\Gamma})\, \mathcal{E}N^{-1}(X^2 + \Gamma\mathring{\Gamma})\, Mb = b. \end{aligned} \tag{29}$$

На основании (29) нетрудно записать дисперсионные уравнения, подобные (20). Однако в отличие от (19) из уравнений (29) можно исключить оставляющие a_z и b_z. Действительно, первая и вторая клеточные строчки первого уравнения (28) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_z &= M_{\perp' z} b_z + M_{\perp' \perp} b_\perp + M_{\perp' \perp'} b_{\perp'}, \\ \frac{[\Gamma_n]}{\Gamma} a_\perp &= M_{\perp' z} b_z + M_{\perp' \perp} b_\perp + M_{\perp' \perp'} b_\perp, \end{aligned}$$

т. е. влекут за собой

$$a_{zn} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma}\, a_{\perp n}. \tag{30}$$

Точно так же из первых двух клеточных строчек второго уравнения (28) получается

$$b_{zn} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma}\, b_{\perp n}. \tag{31}$$

Оставляя в каждом из уравнений (28) вторую и третью клеточные строчки, получаем матричные уравнения относительно векторов a' и b', не содержащих z-составляющих:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'a' &= b', \\ M'b' &= a'. \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь

$$\mathcal{E}' = \begin{Vmatrix} [\Gamma_n^{-1}]\, \mathcal{E}_{\perp' z}[\Gamma_n] + \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, \mathcal{E}_{\perp' \perp} & \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, \mathcal{E}_{\perp' \perp'} \\ (\mathcal{E}_{zz} + \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, \mathcal{E}_{\perp z})\frac{[\Gamma_n]}{\Gamma} + \mathcal{E}_{z\perp} + \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, \mathcal{E}_{\perp\perp} & \mathcal{E}_{z\perp'} + \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, \mathcal{E}_{\perp\perp'} \end{Vmatrix};$$

$$M' = \begin{Vmatrix} [\Gamma_n^{-1}]\, M_{\perp' z}[\Gamma_n] + \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, M_{\perp\perp'} & \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, M_{\perp'\perp'} \\ (M_{zz} + \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}] M_{\perp z})\frac{[\Gamma_n]}{\Gamma} + M_{z\perp} + \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, M_{\perp\perp} & M_{z\perp'} + \Gamma\,[\Gamma_n^{-1}]\, M_{\perp\perp'} \end{Vmatrix}.$$

Следующее из (32) дисперсионное уравнение имеет вид

$$\mathrm{Det}\,|\mathcal{E}'M' - I| = 0 \text{ или } \mathrm{Det}\,|M'\mathcal{E}' - I| = 0. \tag{33}$$

Прямое сравнение показывает, что все эти результаты совпадают с полученными в работе [2]. В частности, формулам (30), (31) соответствуют (36), (37) из [2].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше показано, что последовательное применение метода Ритца к соответствующей вариационной формулировке для резонатора и волновода приводит к тем же результатам, что и прямое разложение полей по собственным функциям. Однако достигнутое в данной работе известное улучшение формализма позволило не только получить прежние результаты в более обозримой форме, но и для случая, рассмотренного в § 2, найти выражение, значительно более выгодное с вычислительной точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Никольский, Исследование полых систем с анизотропными областями методом собственных функций. Ч. I. Резонатор, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 11, 1802.
2. В. В. Никольский, Исследование полых систем с анизотропными областями методом собственных функций. Ч. III. Волновод, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 1, 74.
3. В. В. Никольский, Вариационный принцип для полых систем с анизотропной средой, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 9, 000.

Поступила в редакцию
10 I 1961

1961 № 10

О ЦЕЛЕСООБРАЗНОЙ ФОРМЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА СВЯЗИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ГАРМОНИКАМИ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Л. Н. Лошаков

Приведены соображения, показывающие целесообразность изменения введенного ранее выражения для коэффициента связи при взаимодействии электронного потока с произвольной пространственной гармоникой в системе с периодической структурой.

В статьях [1, 2], посвященных получению характеристического уравнения для ЛБВ и ЛОВ при помощи леммы Лоренца, искомые постоянные распространения в системе с электронным потоком определялись выражением

$$\gamma_m = \mp j\beta_{00}(1 \pm \delta) \mp j\frac{2\pi}{h} m = \mp j\beta_{0m}\left(1 \pm \frac{\beta_{00}}{\beta_{0m}}\delta\right). \qquad (1)$$

В этом выражении через β_{00} и β_{0m} обозначены фазовая постоянная нулевой и m-й пространственных гармоник в замедляющей системе с периодом структуры h в отсутствие пучка; δ — добавочный член, при помощи которого учитывается относительное изменение фазовой постоянной нулевой гармоники, вызванное присутствием электронного потока. Верхний знак относится к случаю взаимодействия с прямой пространственной гармоникой, нижний — к случаю взаимодействия с обратной пространственной гармоникой.

Для добавочного члена δ при взаимодействии с n-й пространственной гармоникой сложной волны, существующей в системе, было получено характеристическое уравнение в виде

$$\delta\left[\left(\delta + \frac{1-\eta}{\chi}\right)^2 - \Gamma M\right] \pm M\frac{\omega\varepsilon}{4\beta_{00}P_0}\int_{s_0}|E_{0nz}|^2 ds = 0. \qquad (2)$$

В уравнении (2) $\chi = \frac{\beta_{00}}{|\beta_{0n}|}$; η — отношение фазовой скорости взаимодействующей (рабочей) гармоники к средней скорости электронов; $M = q/\beta_{00}^2$ — токовый параметр; q — квадрат плазменного волнового числа безгранично-широкого пучка; Γ — коэффициент депрессии поля объемного заряда; P_0, $|E_{0nz}|$ — величина среднего по времени полного потока мощности сложной волны и амплитуда электрического поля рабочей гармоники в направлении возможного движения электронов, существующие в отсутствие электронного потока; ω — круговая частота; ε — диэлектрическая проницаемость среды и s_0 — площадь поперечного сечения электронного потока. При расчете применялась рациональная практическая система единиц.

Безразмерная величина

$$K_{cn} = \pm \frac{\omega\varepsilon}{2\beta_{00} P_0} \int_{s_0} |E_{0nz}|^2 ds \tag{3}$$

была названа коэффициентом связи при взаимодействии с n-й прямой или обратной (нижний знак) пространственной гармоникой. Предложенное выражение для K_{cn} нельзя признать вполне удачным в силу того, что согласно формуле (1) относительное возмущение фазовой постоянной рабочей (n-й) пространственной гармоники, характеризующее эффективность взаимодействия с ней, учитывается добавочным членом $\frac{\beta_{00}}{|\beta_{0n}|}\delta^*$. Следовательно, выражение (3) в общем случае (за исключением $n = 0$) представляет собой промежуточный параметр, который менее полно, чем при введении K_{cn} применительно к характеристическому уравнению для добавочного члена рабочей гармоники, определяет изменение этой гармоники, вызванное взаимодействием с электронным потоком.

Легко видеть, что характеристическое уравнение для добавочного члена $\delta' = \frac{\beta_{00}}{|\beta_{0n}|}\delta$ можно получить умножением уравнения (2) на $\left(\frac{\beta_{00}}{|\beta_{0n}|}\right)^3$. Тогда новое характеристическое уравнение при сохранении прежних обозначений будет иметь вид

$$\delta'[(\delta' + 1 - \eta)^2 - \Gamma M] + \frac{1}{2} M K_{cn} = 0, \tag{4}$$

где

$$\eta = \frac{\omega}{u_0 |\beta_{0n}|}; \quad M = \frac{q}{\beta_{0n}^2} = \frac{e i_0}{m\varepsilon u_0^3 \beta_{0n}^2}; \tag{5}$$

$$K_{cn} = \pm \frac{\omega\varepsilon}{2|\beta_{0n}| P_0} \int_{s_0} |E_{0nz}|^2 ds. \tag{6}$$

В формулах (5) e, m — заряд и масса электрона; i_0, u_0 — соответственно постоянная составляющая плотности тока и скорости электронов.

Коэффициент связи, определяемый формулой (6), более полно характеризует возмущенную постоянную распространения рабочей пространственной гармоники и, следовательно, эффективность взаимодействия, т. е. качество замедляющей системы. Это выражение инвариантно относительно нумерации гармоник, что соответствует существующему произволу в их нумерации. При указанном изменении расчета постоянная распространения рабочей гармоники в системе с электронным потоком определяется формулой

$$\gamma_n = -j|\beta_{0n}|(1 + \delta'). \tag{7}$$

Постоянные распространения всех пространственных гармоник сложной волны, содержащей одну рабочую гармонику, получают одинаковое приращение $(-j|\beta_{0n}|\delta')$; поэтому для расчета постоянных распространения нерабочих гармоник этой сложной волны справедливо выражение

$$\gamma_m = \mp j\beta_{0m}\left(1 \pm \frac{|\beta_{0n}|}{\beta_{0m}}\delta'\right). \tag{8}$$

Формула (8) показывает, что относительное возмущение, вносимое пучком, будет различным для гармоник разных номеров.

* Для обратной рабочей гармоники $\beta_{0n} < 0$.

На необходимость инвариантности коэффициента связи по отношению к нумерации гармоник — для применения его в качестве самостоятельного параметра при оценке эффективности замедляющих систем — обратил внимание автора Л. П. Лисовский.

В заключение представляет практический интерес отметить, что параметры уравнения (4) η, M и K_{cn}, определяемые формулами (5) и (6), можно связать с параметрами расстройки скоростей b, усиления C и сопротивлением связи R_{cn}, применяемыми в теории Пирса, при помощи соотношений

$$\eta = \frac{1}{1 + bC}, \tag{9}$$

$$K_{cn} = \omega\varepsilon\,|\beta_{0n}|\,s_0 R_{cn}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{2\eta} M K_{cn} = C^3, \tag{11}$$

причем вблизи синхронизма $\eta \simeq 1$. При получении формулы (10) было предположено, что в выражение для сопротивления связи входит среднеквадратичное по сечению пучка значение электрического поля взаимодействующей пространственной гармоники.

Приведенные формулы (9)—(11) могут быть полезными для сравнительной оценки результатов различных методов расчета. В частности, K_{cn}, по-видимому, более точно чем R_{cn} характеризует связь между электронным потоком и замедляющей системой, учитывает геометрию пространства взаимодействия; поэтому величина этого параметра не изменяется при параллельном соединении систем. В силу этого безразмерный коэффициент связи можно считать более удобным чем сопротивление связи для оценки качества замедляющих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Лошаков, Применение леммы Лоренца для определения постоянных распространения при взаимодействии электронного потока с пространственными гармониками, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 4, 461.
2. Л. Н. Лошаков, Об учете поля объемного заряда при расчете постоянных распространения в замедляющей системе в присутствии электронного пучка с помощью леммы Лоренца, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 4, 688.

Поступила в редакцию
24 III 1961

1961 №

ВЛИЯНИЕ ПУЛЬСАЦИИ СЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА НА КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА ЛАМПЫ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

В. Б. Гласко, А. А. Зюзин-Зинченко, В. М. Лопухин

Изучено влияние пульсации сечения электронного потока в электронном прожекторе на коэффициент шума ЛБВ. Приведены графики зависимости коэффициента шума от параметров Δ и β, характеризующих пульсацию сечения потока. Построена зависимость коэффициента шума от длины электронного прожектора для разных значений Δ и β. Установлено, что пульсация электронного потока приводит, как правило, к увеличению коэффициента шума ЛБВ.

Вопрос о вычислении коэффициента шума ЛБВ, определяющего чувствительность, рассмотрен в ряде статей, из которых наиболее инт ресными являются работы, посвященные уменьшению этого коэффиц ента. В статьях [1, 2, 3] дан обзор этих работ до 1958 г. и приведе подробная библиография. Аналогичные вопросы рассмотрены в моногр фиях [4, 5].

Расчет коэффициента шума ЛБВ с учетом функции распределен электронов проделан Бергаммером и Блумом [6], которые в результа интегрирования уравнения Больцмана показали неинвариантность па метров шума S и П в электронных потоках. В этой же работе показан что многоскоростной характер электронного потока приводит к умен шению минимально достижимого коэффициента шума ЛБВ.

В работах [7, 8] рассмотрены вопросы корреляции флуктуаций то и скорости на катоде.

Робинзон [7] показал, что флуктуации тока и скорости некоррелир ваны при температурно ограниченной эмиссии. При переходе к режи ограничения тока пространственным зарядом флуктуации тока умен шаются; кроме того, между флуктуациями тока и скорости возникает ко реляция.

Тьен и Мошман [8] провели моделирование случайных процесс вблизи минимума потенциала при помощи метода Монте-Карло и п некоторых физических предположениях пришли к выводу об отсутств корреляции флуктуаций тока и скорости в режиме тока, ограниченно пространственным зарядом.

Расхождение в выводах работ [7] и [8] связано с различной физическ картиной процессов вблизи виртуального катода, принятой в этих работа

В работе Герценштейна [9] оценены объемные шумы, которые долж существовать в электронном потоке, представляющем собой статистич скую систему. Показано, что объемный шум может преобладать над ш мами, вызванными дробовыми процессами на катоде, в диапазоне милл метровых волн.

Несколько работ [10, 11] посвящено экспериментальному изучен шумовых процессов в электронном потоке и коэффициенту шума ЛБ В работе Мак Интоша [10] при помощи сеток и диафрагм, перемеща щихся вдоль электронного потока, экспериментально изучались шу токораспределения.

Саито Шигебуми [11] описал метод экспериментального измерения действительной части коэффициента корреляции флуктуаций тока и скорости в электронном потоке. Вдоль пучка перемещались два резонатора с расстоянием между ними $\lambda_p/4$ (λ_p — плазменная длина волны электронного потока). Шумы диапазона СВЧ подавались на двойной T-мост, стоявший на входе модуляционного радиометра. Такая схема позволяла отдельно измерять шумы в быстрой и медленной электронных волнах.

В ряде работ описаны новые методы снижения коэффициента шума ЛБВ и ЛОВ в режиме усиления. В работах Кюри и Фостера [12, 13] экспериментально исследованы ЛОВ-усилители с малыми шумами. В этих лампах использовались трубчатые электронные потоки со специальным распределением поля вдоль потока в прожекторах. Эти прожекторы характеризуются отсутствием минимума потенциала вблизи катода, а также весьма медленным нарастанием потенциала в области, близкой к катоду. В этой области (где поток имеет многоскоростной характер с низким средним значением скорости) и происходит подавление шумов в потоке электронов. Минимальное экспериментальное значение коэффициента шума ЛОВ-усилителей с электронными прожекторами этого типа равнялось 2.9 *дб*.

В работе [14] описана ЛБВ для диапазона волн 10 *см* с коэффициентом шума 3.5 *дб*. Поток электронов имел сплошное сечение, поле изменялось с координатой весьма медленно, распределение поля было таким же, как в прожекторах Кюри и Фостера.

В работе Шоу и других [15] также отмечена возможность подавления шумов в электронном потоке при помощи участка дрейфа с низким потенциалом. В экспериментальной лампе для диапазона волн 3 *см* с восьмиэлектродным прожектором и L-катодом был получен минимальный коэффициент шума 6.7 *дб*. При оксидном катоде следует ожидать уменьшения коэффициента шума.

Мюллер и Кюри [16] показали, что при достаточно плавном нарастании потенциала в прожекторе возможны значения коэффициента шума, близкие к единице. С возрастанием частоты коэффициент шума падает.

Герценштейн [17] рассмотрел пространственные биения шумовых волн в связанных замедлителях. Он показал, что в результате биений существуют точки, где обращается в нуль как шумовой ток, так и напряжение. Устройство такого типа, помещенное между электронным прожектором и входом ЛБВ, может в принципе значительно уменьшить коэффициент шума ЛБВ.

Ряд работ посвящен изучению параметрических ламп бегущей волны с поперечным полем [18—21]. В этих лампах достигнут минимальный коэффициент шума $F_{мин} = 2.3$ *дб*. Обзор работ в этой области дан в статье [22].

Подводя итог краткому обзору работ по уменьшению коэффициента шума ЛБВ и ЛОВ диапазона сантиметровых волн, следует сказать, что наибольшие успехи были достигнуты в прожекторах с весьма медленно изменяющимся потенциалом, а также в параметрических ЛБВ с поперечным полем. Заметим, что все указанные выше работы предполагают постоянство сечения электронного потока в прожекторе.

Настоящая статья посвящена несколько иной группе вопросов. Дело в том, что в практических условиях формирования электронного потока он часто имеет пульсирующее, изменяющееся с координатой сечение. Причинами пульсации могут являться нарушение аксиальной симметрии прожектора, неоднородность магнитного поля в нем, наличие радиальных скоростей у электронов, вылетающих с катода.

Целью статьи является изучение влияния пульсации сечения электронного потока в прожекторе на коэффициент шума ЛБВ, имеющей прожектор с двумя анодами. Вблизи катода в таком прожекторе имеется минимум потенциала, и далее, при удалении от катода, потенциал возра-

стает достаточно плавно, что обеспечивает минимальное значение коэ
фициента шума ЛБВ с цилиндрическим потоком порядка семи едини
Ход потенциала в таком прожекторе отличается от хода потенциала в мя
гоэлектродных прожекторах [12, 13, 14], при помощи которых были п
лучены более низкие значения коэффициента шума ЛБВ и ЛОВ. П
такой постановке задачи характер корреляции флуктуаций тока и скор
сти в некотором начальном сечении пр
жектора не является существенны
Поэтому целесообразно принять пр
стейшее предположение об отсутств
корреляции флуктуаций в начальн
сечении прожектора. Формально ко
реляция может быть затем учтена в с
ответствии с работой [27].

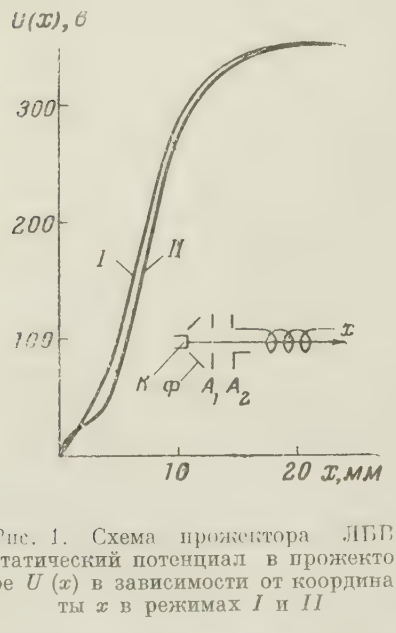


Рис. 1. Схема прожектора ЛБВ; статический потенциал в прожекторе $U(x)$ в зависимости от координаты x в режимах I и II

Рассмотрим трехэлектродный пр
жектор ЛБВ с цилиндрическим ка
дом K, имеющий фокусирующий эл
ктрод Φ, а также аноды A_1 и A_2 (с
рис. 1). Введем цилиндрическую систе
координат x, r, θ, в которой ось x со
падает с осью пучка, а плоскость $x =$
совпадает с виртуальным катодом (в
де ниже координата x отсчитывается
миллиметрах). Прожектор находится
продольном постоянном фокусирующ
магнитном поле H_0. Теория и экспе
мент показывают, что при этом эл
тронный поток является пульсиру
щим, сечение его квазипериодически
меняется с координатой x. Параметры, характеризующие пульсацию по
ка, зависят от электростатического поля в прожекторе E_0 магнитного по
H_0 и соотношения скоростей v_x и v_r на катоде. Теоретически форму
чения электронного потока приближенно можно найти, если вычисл
траектории электронов, находящихся на периферии потока в полях
и $E_0 = -\mathrm{grad}\, U(x, r, 0)$, где $U(x, r, \theta)$ — статический потенциал в прожекто
найденный без учета пространственного заряда. Интегрируя уравнен
движения периферийного электрона в полях H_0 и E_0 для одного из ра
чих режимов ЛБВ с трехэлектродным прожектором, можно убедит
в том, что траектория электрона приближенно определяется формул

$$b = b_0 [1 + \Delta \sin \beta k(x)\, x],$$

где b_0 — радиус невозмущенного потока; Δ и β — постоянные, зависящ
от H_0, E_0 и начальных условий для скоростей электронов в сечении $x =$
$k(x)$ — функция вида

$$k(x) = 820\,(x + 6)^{-3} + 0{,}4.$$

Ниже будем считать, что выражение (1), где $k(x)$ дается формулой
описывает изменение сечения электронного потока. Параметр Δ харак
ризует глубину модуляции сечения потока, $\beta k(x)$ — волновое число
дуляции, так что $\Lambda(x) = 2\pi/\beta k(x)$ — квазипериод модуляции. П
этом параметрам Δ и β будем придавать различные значения, учиты
разный возможный характер периодичности потока в зависимости от
чальных условий в потоке в минимуме потенциала при $x = 0$.

Цель настоящей работы состоит, таким образом, в установлении
висимости коэффициента шума F ЛБВ от параметров Δ_i и β_i ($i = 1, 2, \ldots$,

для двух электрических режимов работы прожектора, при которых распределение статического потенциала в прожекторе дается кривыми *I* и *II* рис. 1. Варианты $i = 1—16$ соответствуют режиму *I*, а варианты $i = 17—22$ — режиму *II*. В режиме *I* ток равен I_{01}, а в режиме *II* — I_{02}. Распределение потенциала, близкое к кривой *I* или *II* рис. 1, можно получить, подбирая напряжения на электродах трехэлектродного прожектора (см., например, работу [23]).

Для расчета коэффициента шума ЛБВ предположим, что на виртуальном катоде имеются некоррелированные флуктуации тока *I* и скорости *v*, которые затем распространяются в электростатическом поле прожектора, причем сечение потока изменяется с координатой *x*.

Допустим, что потенциал $U(x)$ изменяется с координатой x достаточно медленно, так что в потоке не возбуждаются высшие типы колебаний.

Предположим также, что вблизи катода на расстояниях $x < x_1$, где $x_1 = 0{,}2\, b_0$ (b_0 — радиус невозмущенного потока в миллиметрах), потенциал $U(x)$ принимает вид, найденный Лэнгмюром для задачи о потенциале вблизи виртуального катода [24].

Заметим, что точный вид поля $U(x)$ для $x < 0{,}2b_0$ не является существенным для выводов настоящей работы, так как ее цель — установление зависимости коэффициента шума от пульсации сечения электронного потока при фиксированном распределении потенциала $U(x)$.

Аппроксимируя электронный поток постоянного радиуса с переменной средней скоростью электронов $v_0(x)$ неоднородной линией, приходим к уравнению [25]

$$I'' + 3\frac{v_0'}{v_0} I' + \frac{\omega_p^2}{v_0^2} I = 0, \tag{3}$$

где $I' = dI/dx$; $I'' = d^2I/dx^2$; $I(x)$—амплитуда переменной составляющей конвекционного тока в сечении x (множитель $\exp\left(i\omega t - i\int_0^x \beta_e\, dx\right)$ опущен, см., например, [2]); $v_0(x)$ — средняя скорость электронов в направлении оси x (*мм/сек*); $\omega_p(x)$ — эффективная плазменная частота: $\omega_p(x) = \omega_0(x)\,\alpha_0(\beta_e l)$; $\omega_0^2 = eI_0/m\varepsilon_0 v_0(x)\,S$; $e/m = 1{,}76\cdot 10^{11}$ (*к/кг*); $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ (*ф/м*); $v_0(x)$ (*м/сек*) — постоянная составляющая скорости электронов; I_0 — постоянная составляющая тока в потоке (в амперах); S — площадь сечения потока (в квадратных метрах); $\alpha_0(\beta_e b)$ — известная функция $\beta_e b$; $\beta_e b = \omega b/v_0(x)$; ω — круговая частота сигнала; b — радиус цилиндрического электронного потока. Функция $\alpha_0(\beta_e b)$ приближенно аппроксимируется выражением (см., например, [26])

$$\alpha_0^2(\xi) = \begin{cases} (-0{,}146\xi^2 + 0{,}596\xi + 0{,}121)^2 & \text{для } 0{,}4 < \xi < 1{,}59, \\ 1 - \exp(-0{,}42\xi) & \text{для } 1{,}59 < \xi < \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть сечение потока изменяется с координатой x; при этом $S = S(x)$. В случае если изменение сечения с координатой происходит медленно, так что в потоке не возникают высшие типы волн (т. е. пространственные гармоники), переменный ток по-прежнему описывается уравнением (3), при вычислении ω_p следует, однако, положить $S = \pi b_0^2 \varphi^2(x)$, где $\varphi(x) = 1 + \Delta \sin \beta k(x)\, x$ (см. формулу (1)).

Можно рассматривать два типа решений I_1 и I_2 уравнения (3) в соответствии с различными граничными условиями на виртуальном катоде:

1) $I_1(0) \neq 0$, $I_1'(0) = 0$ — возбуждение током в минимуме потенциала,

2) $I_2(0) = 0$, $I_2'(0) \neq 0$ — возбуждение скоростями * в минимуме потенциала.

Эти два типа решений считаем некоррелированными, ток I_1 в отсутствие тока I_2 приводит к коэффициенту шума F_1, а ток I_2 в отсутствие тока I_1 — к коэффициенту шума F_2.

Полный некоррелированный коэффициент шума F дается уравнением

$$F - 1 = F_1 - 1 + F_2 - 1.$$

Для вычисления коэффициента шума необходимо интегрировать уравнение (3) при соответствующих начальных условиях [2]. В соответствии со сказанным выше, полагая в (3) $S = S(x)$ согласно выражению (1) и подставляя $v_0(x) = \sqrt{2eU(x)/m}$, где $U(x)$ — потенциал, даваемый кривыми I и II на рис. 1, приходим к уравнению

$$I''_{1,2} + 1{,}5\frac{U'}{U + 0{,}07} I'_{1,2} + 9{,}5\cdot 10^{-2} \frac{I_{0n}\alpha_0^2(\xi)}{\pi b_0^2 (U + 0{,}07)^{3/2}\varphi^2(x)} I_{1,2} = 0, \qquad (5$$

где I_{0n} — постоянная составляющая тока в потоке (в амперах); она принимает два значения ($n = 1, 2$) в соответствии с двумя режимами работы ЛБВ (кривые I и II на рис. 1); $I_{1,2}$ — переменная составляющая тока; индексы 1 и 2 соответствуют двум типам начальных условий; $\alpha_0^2(\xi)$ дается формулой (4); $\varphi(x) = 1 + \Delta_i \sin k(x)\, x\beta_i$;

$$U(x) = \begin{cases} x^2 q_{0n} = 2{,}33\, U^{3/2} + 1{,}84\, U & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}1 \\ \text{дается графиками } I \text{ и } II \text{ в режимах } I \text{ и } II & \text{для } 0{,}1 \leqslant x \leqslant 17 \\ 350\ в & \text{для } 17 \leqslant x \leqslant 29 \end{cases}$$

$k(x)$ дается формулой (2); $b_0 = 5\cdot 10^{-4}$ *м*; величина 0,07 равна (в электронвольтах) средней тепловой энергии электронов в минимуме потенциала при температуре катода $T = 10^3$ °K (см., например, [2]); $q_{0n} = I_{0n}/\pi b_0^2$; q_{0n} имеет размерность $a/м^2$.

В проведенных расчетах Δ изменялось в пределах $0 < \Delta < 0{,}4$; $0{,}5 < \beta < 4$. При помощи выражения (2) и рис. 1 можно убедиться в том, что в интервале $0 < x < 29$ выполняется неравенство $\Lambda(x) \gg \lambda_e$, где $\Lambda(x) = 2\pi/k(x)\,\beta$ (*мм*); k дается формулой (2); λ_e (*мм*) $= 2\pi v_0(x)/\omega$; $v_0(x)$ — средняя скорость электронов в сечении x (*мм*/*сек*); ω — круговая частота. При выполнении этого неравенства можно пренебречь пространственными гармониками в потоке и использовать уравнение неоднородной длинной линии (5).

Значения параметров Δ_i и β_i приведены в таблице. Уравнение (5) следует интегрировать при начальных условиях

$$I_{1n}(0) \neq 0, \qquad (6$$

$$I'_{1n}(0) = 0, \qquad (7$$

$$I_{2n}(0) = 0, \qquad (8$$

$$I'_{2n}(0) \neq 0. \qquad (9$$

---

* Напомним, что в линейной теории $\tilde{I}' = -jI_0\omega \frac{\tilde{v}}{v_0^2} \cdot 10^{-3}$, где $\tilde{I}$ и $\tilde{v}$ — переменные составляющие тока и скорости электронов; I_0 и v_0 — постоянные составляющие тех же величин; ω — круговая частота; I и v имеют размерность a и *м*/*сек*; ω — *сек*$^{-1}$; $I' = dI/dx$ (a/*мм*$^{-1}$).

№ варианта	Δ_i	β_i	F_1-1	F_2-1	№ варианта	Δ_i	β_i	F_1-1	F_2-1
1	0,15	0,5	0,36	18,9	*12*	0,3	0,2	0,29	18,1
2	0,15	1,0	0,38	16,4	*13*	0,3	0,5	0,15	54,7
3	0,15	1,15	0,65	11,6	*14*	0,3	1	0,48	24,5
4	0,2	1,0	0,39	18,7	*15*	0,3	1,5	0,63	10,8
5	0,3	1,0	0,47	23,2	*16*	0,3	2	0,62	12,6
6	0,4	1,0	0,83	28,4	*17*	0,15	0,5	72,3	682
7	0,15	0,2	0,58	10,8	*18*	0,15	1,0	29,1	418
9	0,15	0,4	0,44	13,3	*19*	0,15	1,5	96,4	1165
9	0,15	2	0,44	11,4	*20*	0,2	1	21,2	380
10	0,15	3	0,59	9,77	*21*	0,3	1	13,1	314
11	0,15	4	0,76	8,17	*22*	0,4	1	5,68	155

Значения (6) — (9) получены при помощи формул (см., например, [2])

$$I_{1n}(0) = (2eI_{0n}\Delta f)^{1/2}, \tag{10}$$

$$I'_{2n}(0) = \frac{I_{0n}\omega}{v_0^2(0)}\left[(4-\pi)\frac{e}{m}\frac{kT\Delta f}{I_{0n}}\right]^{1/2}\cdot 10^{-3}, \tag{11}$$

где $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*; I_{0n} — постоянная составляющая тока в амперах; Δf — ширина полосы пропускания приемника (*гц*); $\omega = 2\pi f$; f — рабочая частота усилителя (*гц*); $v_0(0)$ — средняя скорость электронов (*м/сек*) в минимуме потенциала; $m = 9\cdot 10^{-31}$ *кг*; $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ *дж/град*; T — температура катода по абсолютной шкале. В этих единицах I_{1n} имеет размерность ампер, а I'_{2n} — *а/мм*; В результате подстановки в формулы (10) и (11) значений токов $I_{01} = 2\cdot 10^{-4}$ *а*, $I_{02} = 4\cdot 10^{-4}$ *а*, $f = 3\cdot 10^9$ *гц*, $T = 10^3$°K, $\Delta f = 2\cdot 10^6$ *гц* и принимая также, что $v_0^2(0)$ соответствует энергии 0,07 *эв*, получаем

$$q_{1,1}(0) = \frac{I_{1,1}(0)}{S_0} = 0{,}0144\ \frac{a}{м^2}, \qquad q'_{2,1}(0) = \frac{I'_{2,1}(0)}{S_0} = 0{,}9\ \frac{a}{м^2\cdot мм};$$

$$q_{1,2}(0) = \frac{I_{1,2}(0)}{S_0} = 0{,}0204\ \frac{a}{м^2}; \qquad q'_{2,2}(0) = \frac{I'_{2,2}(0)}{S_0} = 1{,}275\ \frac{a}{м^2\cdot мм},$$

где $S_0 = \pi b_0^2$; $b_0 = 5\cdot 10^{-4}$ *м*.

Заметим прежде всего, что при $x < 0{,}1$ *мм* входящая в уравнение (5) функция $\varphi(x) \simeq 1$, т. е. модуляция сечения потока не сказывается на поведении функций $I_{1,2}$ вблизи катода. Уравнение (5) является обобщением уравнения Матье — Хилла. Оно интегрировалось при начальных условиях (6) — (9) для ряда значений параметров Δ_i и β_i с помощью быстродействующей электронной вычислительной машины. Решение проведено для двух режимов работы ЛБВ, для которых распределение потенциала $U(x)$ дается кривой *I* или *II* (рис. 1). При этом функция $U(x)$, заданная графически, аппроксимировалась последовательностью полиномов третьей степени. На начальном участке алгебраическое уравнение для функции $U(x)$ заменялось дифференциальным.

Вычисление коэффициентов шума после интегрирования данного уравнения было предусмотрено программным путем и проводилось автоматически.

На рис. 2—7 приведены графики функций $q_1(x) = I_1(x)/S_0$ ($a/м^2$) и $q_2(x) = I_2(x)/S_0$ ($a/м^2$), где $S_0 = \pi b_0^2$ ($м^2$), для ряда значений параметров Δ_i и β_i, даваемых таблицей. Из этих графиков можно сделать следующие выводы.

1. Сравнивая ход кривых $q_1(x)$ и $q_2(x)$ при наличии модуляции $0 < \Delta < 0{,}4$ со случаем отсутствия модуляции $\Delta = 0$ (этот последний случай рассмотрен в статье [2]), можно сделать вывод об одинаковом качественном поведении этих кривых.

2. На входе в спираль ($x = L = 29$) выполняются неравенства $|q_1(L)| < |q_2(L)|$ и $|q_1'(L)| < |q_2'(L)|$, что приводит к неравенству $F_1 < F_2$, где некоррелированные значения коэффициентов шума F_1 и F_2 рассчитываются при помощи формулы

$$F_{1,2}(L) - 1 = Aq_{1,2}^2(L) - Bq_{1,2}(L)\,q_{1,2}'(L) + Eq_{1,2}'^2(L);$$

коэффициенты A, B и E зависят от геометрии спирали, параметров потока, а также от режима работы ЛБВ.

Аналогичные выводы были сделаны ранее в работе [2] для ЛБВ с цилиндрическим электронным потоком постоянного сечения.

Для определенности были взяты два конкретных возможных режима работы ЛБВ.

1. $I_{01} = 2 \cdot 10^{-4}$ a, $b_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ $м$; распределение электростатического поля дается кривой I рис. 1. В этом случае $A = 3{,}08 \cdot 10^6$, $B = 8{,}45 \cdot 10^7$, $E = 1{,}25 \cdot 10^9$.

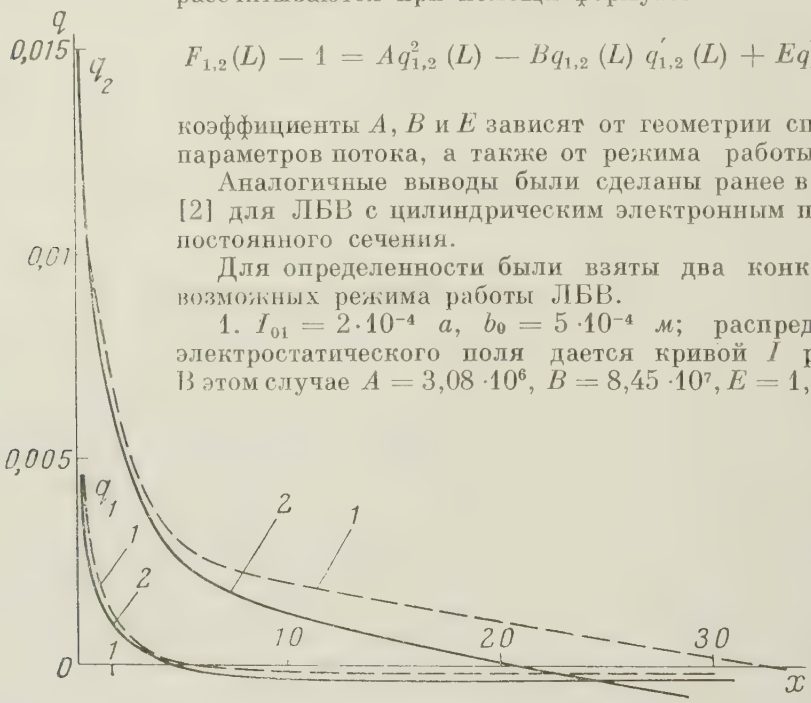


Рис. 2. Зависимости $q_1(x)$ и $q_2(x)$:
1 — вариант *I*; *2* — вариант *2*

2. $I_{02} = 4 \cdot 10^{-4}$ a, $b_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ $м$; распределение электростатического поля дается кривой II рис. 1. В этом случае $A = 1{,}85 \cdot 10^7$, $B = 3{,}94 \cdot 10^8$, $E = 5{,}4 \cdot 10^9$.

Заметим, что формулу (12) нужно рассматривать как приближенную, так как она учитывает пульсацию потока электронов в прожекторе (через величины $q(L)$ и $q'(L)$), но не учитывает пульсацию сечения электронного потока в спирали. Учет пульсации потока в спирали усложняет решение задачи и здесь не приводится.

Результаты расчета величин $F_1 - 1$ и $F_2 - 1$ по формулам (12) в зависимости от Δ_i и β_i приведены в таблице; на рис. 8, 9 построен ряд кривых $F_2(\Delta_i)$ и $F_2(\beta_i)$.

Из таблицы и рис. 8, 9 можно сделать следующие выводы.

1. Для рассмотренных режимов выполняется неравенство $F_2 \gg F_1$, следовательно, при некоррелированном возбуждении шумовых волн в минимуме потенциала главную роль играют флуктуации скорости.

2. Из рис. 8 следует, что в режиме I $F_2 - 1$ в зависимости от β имеет максимум при $\beta_i \simeq 0{,}5$. Величина этого максимума возрастает от 19 при $\Delta_i = 0{,}15$ до 58 при $\Delta_i = 0{,}3$.

Аналогичный вид имеет кривая $F_2(\beta)$ для режима II работы электронного прожектора.

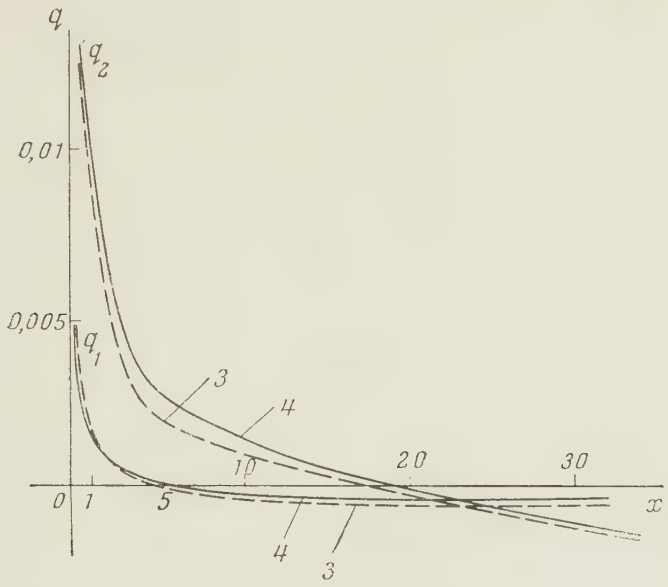


Рис. 3. Зависимости $q_1(x)$ и $q_2(x)$:
3 — вариант *3*; *4* — вариант *4*

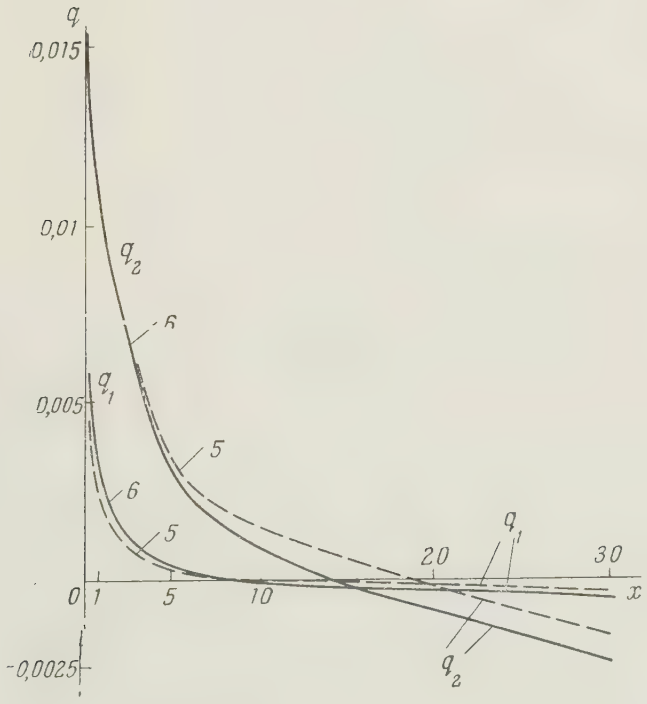


Рис. 4. Зависимости $q_1(x)$ и $q_2(x)$:
5 — вариант *5*; *6* — вариант *6*

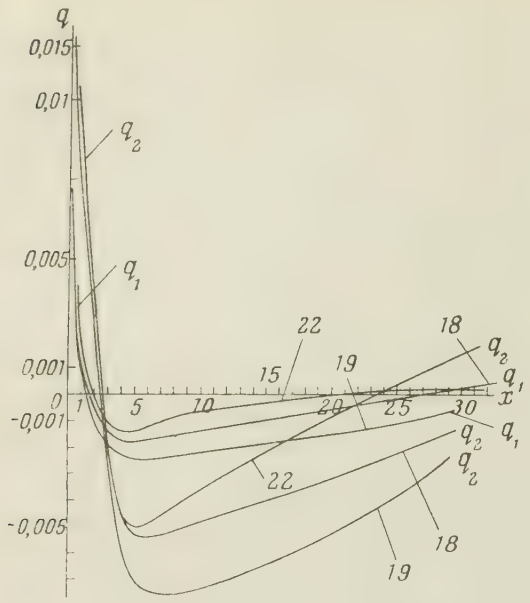


Рис. 5. Зависимости $q_1(x)$ и $q_2(x)$

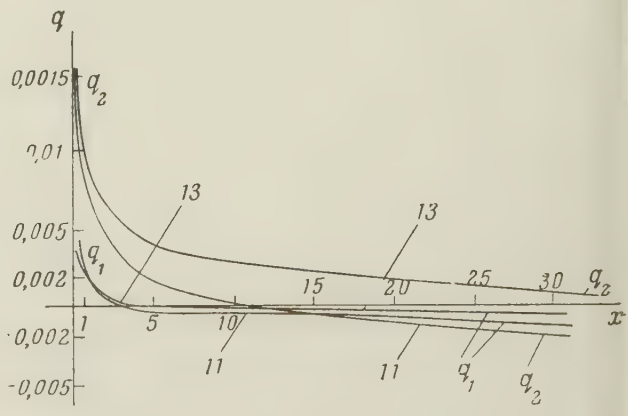


Рис. 6. Зависимости $q_1(x)$ и $q_2(x)$

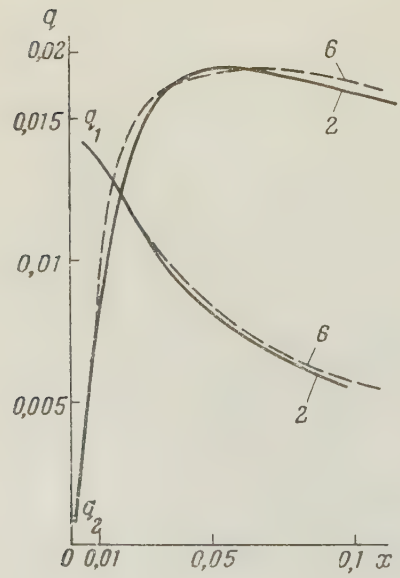


Рис. 7. Зависимости $q_1(x)$ и $q_2(x)$

3. Из рис. 9 вытекает, что с увеличением Δ_i $F_2 - 1$ в режиме *I* монотонно возрастает.

4. На всех приведенных графиках пульсация сечения электронного потока $\Delta_i \neq 0$ приводит к увеличению коэффициента шума ЛБВ по сравнению со случаем $\Delta_i = 0$.

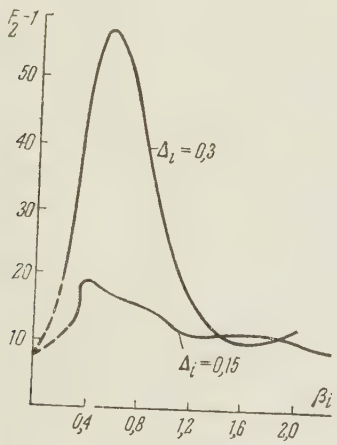


Рис. 8

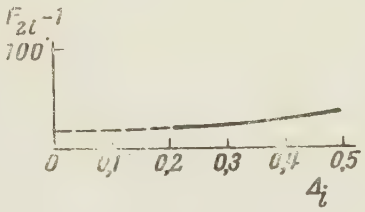


Рис. 9

Рис. 8. $F_2 - 1$ в зависимости от β_i для $\Delta_i = 0{,}15$ и $\Delta_i = 0{,}3$ (режим *I*)

Рис. 9. $F_{2i} - 1$ в зависимости от Δ_i для $\beta_i = 1$ (режим *I*), полученное для вариантов *4—10*

На рис. 10, *а*, *б* приведена зависимость $F_2 - 1$ от величины $\theta = \beta_p l$, где $\beta_p = \frac{\omega_0}{v_0}\alpha_0$ — плазменное волновое число на участке дрейфа $U_0 = 350$ *в* в режиме *I* (см. рис. 1); l — расстояние от катода до входа в спираль. В рассматриваемом режиме ($U_0 = 350$ *в*, $I_{01} = 2 \cdot 10^{-4}$ *а*, $b_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ *м*, $\beta_p = 0{,}0315$ *мм*$^{-1}$) зависимость $F_2(\theta)$ построена для ряда значений параметров пульсации Δ_i, β_i, даваемых таблицей (кривые *1—16*).

На этих же рисунках пунктиром изображена кривая зависимости $F_2 - 1$ от θ для $\Delta = 0$, соответствующая цилиндрическому потоку постоянного сечения $b = b_0$. Вертикальная штрих-пунктирная прямая соответствует $l = L = 29$ *мм*; пересечения этой кривой с кривыми *1—16* дают значения $F_2 - 1$, приведенные в таблице.

Из рис. 10, *а*, *б* следует, что пульсация сечения потока влияет как на величину минимального значения коэффициента шума $F_{2\text{мин}}$, так и на значение $l = l_{\text{опт}}$ расстояния от катода до входа в спираль, при котором F_2 принимает минимальное значение.

На рис. 11 построены значения $F_{2\text{мин}} - 1$ в зависимости от β_i для $\Delta_i = 0{,}15$ и $\Delta_i = 0{,}3$. Эти кривые имеют сходный вид; они обладают максимумом вблизи $\beta \simeq 0{,}8$; с увеличением Δ_i значение функции в максимуме возрастает.

На рис. 12 построена функция $F_{2\text{мин}} - 1$ в зависимости от Δ_i при $\beta = 1$. Эта функция построена на основании кривых *4—6* рис. 10, *а*. Из рис. 12 следует, что при фиксированном β увеличение глубины модуляции Δ приводит к монотонному возрастанию $F_{2\text{мин}} - 1$ и, следовательно, является нежелательным с точки зрения уменьшения коэффициента шума F_2. Необходимо, однако, иметь в виду, что при больших значениях Δ_i уравнение длинной линии (3), положенное в основу расчета, теряет силу, так как оно не учитывает наличия пространственных гармоник в потоке.

Приведенные кривые $F_2(\theta) - 1$ свидетельствуют о том, что пульсация сечения потока почти всегда приводит к увеличению некоррелированного коэффициента шума F_2, вызванного флуктуациями скоростей электронов на виртуальном катоде.

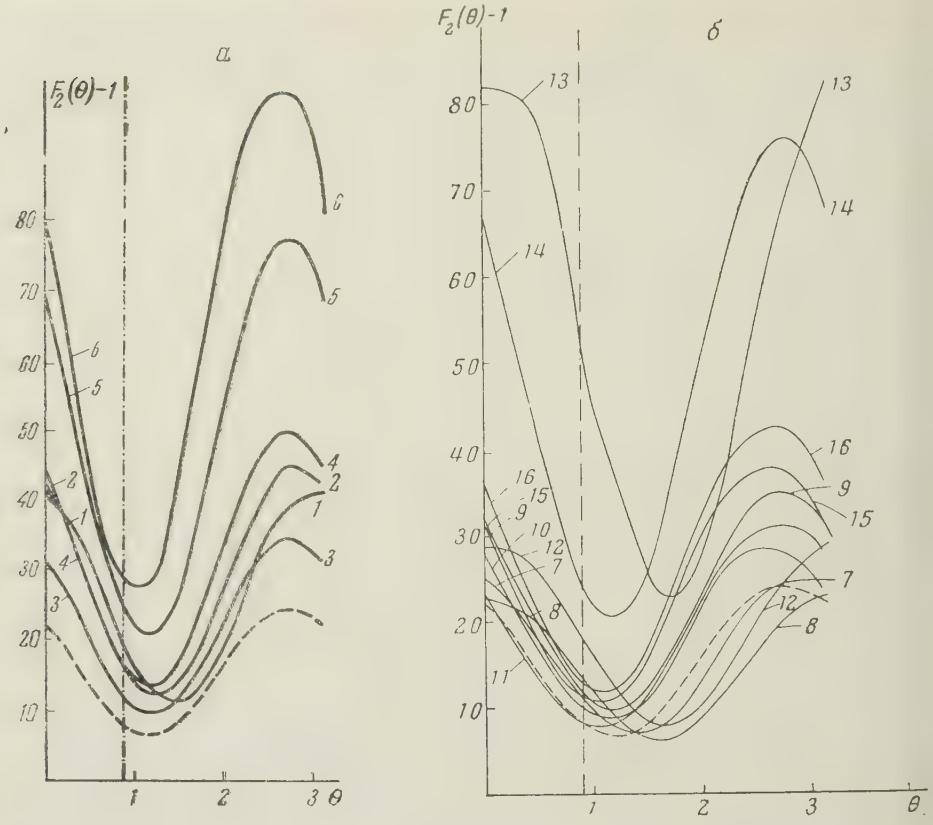


Рис. 10. $F_2 - 1$ в зависимости от $\theta = \beta_p l$ для участка дрейфа режима *I*

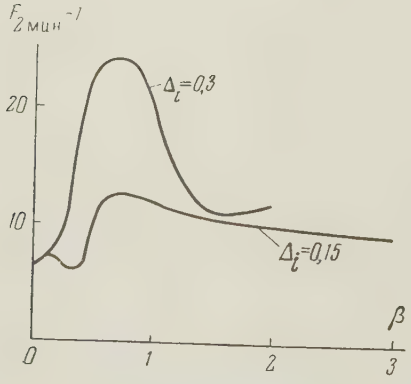


Рис. 11

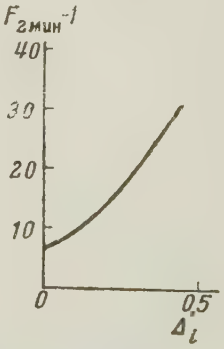


Рис. 12

Рис. 11. $F_{2мин}(\theta_{опт}) - 1$ в зависимости от β для $\Delta_i = 0{,}15$ и $\Delta_i = 0{,}3$ режима *I* (см. рис. 1)

Рис. 12. $F_{2мин}(\theta_{опт}) - 1$ в зависимости от Δ_i для $\beta_i = 1$ режима *I* (см. рис. 1)

Лишь в некоторых случаях, при специальном выборе Δ, β и $\theta_{опт} = \beta_p l_{опт}$, можно получить незначительное уменьшение $F_{2мин}$ по сравнению с минимумом кривой $F_2(l)_{\Delta_i=0}$ для цилиндрического потока (см. кривую *8* на рис. 10, *б*; $\Delta_i = 0{,}15$, $\beta_i = 0{,}4$).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Тагер, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 2, 222.
2. А. А. Зюзин-Зинченко, В. М. Лопухин, В. М. Васильев, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1959, **2**, 5, 589.
3. В. Н. Шевчик, Г. Н. Шведов, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1959, **2**, 5, 511.
4. Noises in Electron Devices, Ed. by L. D. Smullin, H. A. Haus, N. Y., 1959.
5. W. Kleen, K. Pöschl, Einführung in die Mikrowellen Elektronik, II, Stuttgart, 1958.
6. J. Berghammer, S. Bloom, J. Appl. Phys., 1960, **31**, 3, 454.
7. F. N. H. Robinson, J. Electronics and Control, 1958, **5**, 2, 152.
8. P. K. Tien, J. Moshman, J. Appl. Phys., 1956, **27**, 9, 1067.
9. М. Е. Герценштейн, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 1, 146.
10. B. A. McIntosh, Canad. J. Phys., 1959, **37**, 3, 265.
11. Saito Shigebumi, IRE Trans Electron Devices, 1958, **5**, 4, 264.
12. M. R. Currie, D. C. Forster, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 3, 570.
13. M. R. Currie, D. C. Forster, J. Appl. Phys., 1959, **30**, 1, 95.
14. M. Goulton, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 5, 911.
15. A. W. Shaw, A. E. Siegman, D. A. Watkins, Proc. I. R. E., 1959, **47**, 2, 334.
16. W. M. Mueller, M. R. Currie, J. Appl. Phys., 1959, **30**, 12, 1876.
17. М. Е. Герценштейн, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 10, 1254.
18. R. Adler, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 6, 1300.
19. R. Adler, G. Hrbek, G. Wade, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 10, 1756.
20. R. Adler, Proc. I. R. E., 1959, **47**, 10, 1713.
21. Curtis C. Johnson, J. Appl. Phys., 1960, **31**, 2, 338.
22. В. М. Лопухин, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 5, 683.
23. R. C. Knechtly, W. R. Beam, Onde électr., 1958, **38**, 371, 101.
24. Б. М. Царев, Расчет и конструирование электронных ламп, ГЭИ, 1952.
25. S. Bloom, R. Peter, RCA Rev., 1954, **15**, 1, 95.
26. D. A. Watkins, Proc. I. R. E., 1952, **40**, 1, 165.
27. S. Bloom, RCA Rev., 1955, **16**, 2, 179.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
Кафедра радиотехники

Поступила в редакцию
22 XII 1960

О МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ С ДВУМЯ СОБСТВЕННЫМИ ЧАСТОТАМИ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРА В ПРЕДЕЛАХ ШИРИНЫ ЛИНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

В. Н. Луговой

Рассмотрены синусоидальные колебания молекулярного генератора, имеющего в пределах ширины линии излучения вещества две собственные частоты колебаний резонатора. Установлено, что в случае одинаковых типов колебаний резонатора (т. е. типов с равными добротностями и коэффициентами их связи с веществом) имеется один устойчивый режим синусоидальных колебаний, если расстройка собственных частот резонатора не превышает ее критического значения ($\Delta\omega_{кр}/\omega = 1/Q$, где Q — добротность типов колебаний). Если эта расстройка больше критической, то имеются два устойчивых режима синусоидальных колебаний с различными частотами. Частота колебаний молекулярного генератора определяется в этом случае начальными условиями.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проявляется большой интерес к проблеме созд ния молекулярного генератора, колебания которого лежат в инфракра ной и оптической областях [1, 2, 3]. Размеры резонатора в таком генер торе должны значительно превышать длину волны, поэтому в ширин линии излучения вещества будет попадать много собственных часто колебаний резонатора. Чтобы понять работу генератора в этом случа необходимо решить задачу об установившихся колебаниях хотя бы дл двух типов колебаний резонатора. Этому вопросу и посвящена настоя щая статья.

1. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Общие уравнения молекулярного генератора были получены в рабо тах [4, 5]. При наличии в резонаторе двух типов колебаний эти уравнени дают

$$\ddot{x} + \mu_1\dot{x} + \varepsilon_1 x = -\gamma_1\ddot{v},$$
$$\ddot{y} + \mu_2\dot{y} + \varepsilon_2 y = -\gamma_2\ddot{v},$$
$$\ddot{v} + \mu_3\dot{v} + \varepsilon_3 v = \mu_3\left(-R_0 + \frac{w}{2}\right)(x+y), \qquad (1$$
$$\dot{w} + \mu_3\frac{w}{2} = -\mu_3(x+y)\left(\dot{v} + \mu_3\frac{v}{2}\right).$$

Соотношения написаны в безразмерных величинах. Сумма $x - y$ опи сывает полную напряженность электрического поля внутри резонатора v — поляризацию вещества, заполняющего резонатор (например, пучка w дает зависимость от времени числа «высветившихся» молекул. Входящи в выражения (1) параметры соответственно определяют: μ_1, μ_2 — коэф фициенты затухания типов колебаний резонатора; μ_3 — ширину лини излучения вещества; ε_1, ε_2, ε_3 — квадраты собственных частот колебани резонатора и линии вещества; γ_1, γ_2 — коэффициенты связи этих типо

колебаний с веществом; R_0 — начальное число активных молекул. Мы будем считать, что безразмерное время выбрано так, что $\varepsilon_3 = 1$. При помощи замены переменных $v = \mu_1 z$, $w = \mu_1 a$ уравнения (1) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + \mu_1 \dot{x} + \varepsilon_1 x = -\gamma_1 \mu_1 \ddot{z},\\
&\ddot{y} + \mu_2 \dot{y} + \varepsilon_2 y = -\gamma_2 \mu_1 \ddot{z},\\
&\ddot{z} + \mu_3 \dot{z} + z = \mu_3 \left(-f_0 + \frac{a}{2}\right)(x+y),\\
&\dot{a} + \mu_3 \frac{a}{2} = -\mu_3 (x+y)\left(\dot{z} + \mu_3 \frac{z}{2}\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $f_0 = R_0/\mu_1$.

В дальнейшем будем считать выполненными следующие практически интересные условия:

$$\mu_1, \mu_2 \ll \mu_3 \ll 1, \tag{3}$$

$$|\varepsilon_1 - 1|, \quad |\varepsilon_2 - 1| \ll \mu_3,$$

которые означают: ширина резонансной кривой каждого из типов колебаний резонатора значительно меньше ширины линии излучения вещества; ширина линии излучения много меньше ее центральной частоты; обе собственные частоты резонатора значительно ближе к центру линии, чем к ее «краям». Пусть для определенности $\mu_1 \geqslant \mu_2$. Коэффициенты γ_1, γ_2, f_0 будем рассматривать как независящие от малых параметров постоянные. Тогда система (2) близка к уравнениям, общее решение которых имеет вид:

$$\begin{aligned}
x &= x_1 \cos t + x_2 \sin t,\\
y &= y_1 \cos t + y_2 \sin t,\\
z &= z_1 \cos t + z_2 \sin t,\\
a &= \text{const}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Поэтому для решения задачи используем метод ван-дер-Поля, считая постоянные величины в равенствах (4) «медленно меняющимися амплитудами».

Обозначим $\xi = \dot{x}$, $\eta = \dot{y}$, $\zeta = \dot{z}$. Учитывая, что с точностью до малых $\ddot{z} = -z$ и используя (2), получаем

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \xi,\\
&\dot{\xi} = -\omega^2 x - \mu_1 \xi - (\varepsilon_1 - \omega^2)\, x + \gamma_1 \mu_1 z,\\
&\dot{y} = \eta,\\
&\dot{\eta} = -\omega^2 y - \mu_2 \eta - (\varepsilon_2 - \omega^2)\, y + \gamma_2 \mu_1 z,\\
&\dot{z} = \zeta,\\
&\dot{\zeta} = -z - \mu_3 \zeta + \mu_3 \left(-f_0 + \frac{a}{2}\right)(x+y),\\
&\dot{a} = -\mu_3 \frac{a}{2} - \mu_3 \zeta\,(x+y).
\end{aligned} \tag{5}$$

В эти выражения введена частота ω. Будем предполагать, что

$$|\omega^2 - 1| \ll \mu_3, \tag{6}$$

тогда

$$|\varepsilon_1 - \omega^2|, \quad |\varepsilon_2 - \omega^2| \ll \mu_3. \tag{7}$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} x &= x_1(t)\cos\omega t + x_2(t)\sin\omega t,\\ \xi &= -\omega x_1(t)\sin\omega t + \omega x_2(t)\cos\omega t,\\ y &= y_1(t)\cos\omega t + y_2(t)\sin\omega t,\\ \eta &= -\omega y_1(t)\sin\omega t + \omega y_2(t)\cos\omega t,\\ z &= z_1(t)\cos\omega t + z_2(t)\sin\omega t,\\ \zeta &= -\omega z_1(t)\sin\omega t + \omega z_2(t)\cos\omega t. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 — новые неизвестные функции. Подставим (8) в (5). Учитывая (3) и (6) и усредняя по входящему явно времени, получаем

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + \zeta_1 x_2 - \gamma_1 z_2,\\ x_2' &= -\zeta_1 x_1 - x_2 + \gamma_1 z_1,\\ y_1' &= -\zeta_3 y_1 - \zeta_2 y_2 - \gamma_2 z_2,\\ y_2' &= \zeta_2 y_1 - \zeta_3 y_2 + \gamma_2 z_1,\\ \frac{\mu_1}{\mu_3} z_1' &= -z_1 + \Big(f_0 - \frac{a}{2}\Big)(x_2 + y_2),\\ \frac{\mu_1}{\mu_3} z_2' &= -z_2 - \Big(f_0 - \frac{a}{2}\Big)(x_1 + y_1),\\ \frac{\mu_1}{\mu_3} a' &= -a + (x_2 + y_2) z_1 - (x_1 + y_1) z_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь обозначено: $\zeta_1 = (\varepsilon_1 - \omega^2)/\mu_1$, $\zeta_2 = (\omega^2 - \varepsilon_2)/\mu_1$, $\zeta_3 = \mu_2/\mu_1$; штрих означает производную по медленному времени τ:

$$\tau = \frac{1}{2}\mu_1 t. \tag{10}$$

Легко видеть, что в силу (3) и (7) уравнения (9) представляют задачу типа

$$u' = G(u, v), \quad \beta v' = F(u, v), \tag{11}$$

где $u = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$; $v = \{z_1, z_2, a\}$; β — малый параметр. Известно, что фазовое пространство в этом случае разбивается на области «быстрых» и «медленных» движений [6]. Быстрые движения определяются последними тремя уравнениями системы (9) (при этом надо считать $u = \text{const}$). Эти уравнения представляют линейную систему. Ее характеристическое уравнение, как легко убедиться, имеет вид

$$\Big(1 + \frac{\mu_1}{\mu_3}\lambda\Big)\Big\{\Big(1 + \frac{\mu_1}{\mu_3}\lambda\Big)^2 + \frac{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}{2}\Big\} = 0, \tag{12}$$

откуда

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2,3} = -\mu_3/\mu_1. \tag{13}$$

Учитывая, кроме того, что соотношение $F(u, v) = 0$ в рассматриваемом случае каждому u ставит в соответствие только одно значение v, заключаем, что, каковы бы ни были начальные данные, рассматриваемая система быстрым движением придет в область медленных движений и будет на

ходиться в ней все последующие моменты времени. Уравнениями ее движений в этой области будут

$$u' = G(u, v), \quad 0 = F(u, v). \tag{14}$$

Выражая v через u и подставляя это выражение в $G(u, v)$, находим

$$\begin{aligned}
x_1' &= -x_1 + \zeta_1 x_2 + \gamma_1 f_0 \frac{x_1 + y_1}{1 + (1/2)[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]}, \\
x_2' &= -\zeta_1 x_1 - x_2 + \gamma_1 f_0 \frac{x_2 + y_2}{1 + (1/2)[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]}, \\
y_1' &= -\zeta_3 y_1 - \zeta_2 y_2 + \gamma_2 f_0 \frac{x_1 + y_1}{1 + (1/2)[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]}, \\
y_2' &= \zeta_2 y_1 - \zeta_3 y_2 + \gamma_2 f_0 \frac{x_2 + y_2}{1 + (1/2)[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения (15) определяют в частности все предельные циклы исходных уравнений и их устойчивость. Согласно (8) положение равновесия системы (15) соответствует синусоидальным колебаниям молекулярного генератора и, наоборот, всякий режим синусоидальных колебаний (частота которого удовлетворяет условию (6)) может быть получен как положение равновесия этой системы при некотором значении ω.

2. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В дальнейшем мы будем рассматривать положения равновесия $\tilde{x}_1$, x_2, $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ уравнений (15) и их устойчивость. В отношении положений равновесия система (15) эквивалентна (при условиях (3) и (6)) уравнениям

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \mu_1 \dot{x} + \varepsilon_1 x &= -\gamma_1 \mu_1 \ddot{z}, \\
\ddot{y} + \mu_2 \dot{y} + \varepsilon_2 y &= -\gamma_2 \mu_1 \ddot{z}, \\
\ddot{z} + \mu_3 \dot{z} + z &= -\mu_3 (f_0 + \overline{(x + y)\dot{z}})(x + y),
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
x &= \tilde{x} e^{-i\tilde{\omega}t} + \tilde{x}^* e^{i\omega t}; \\
y &= \tilde{y} e^{-i\omega t} + \tilde{y}^* e^{i\omega t}; \\
z &= \tilde{z} e^{-i\omega t} + \tilde{z}^* e^{i\omega t}; \\
\tilde{x} = \frac{\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2}{2}; \quad \tilde{y} &= \frac{\tilde{y}_1 + i\tilde{y}_2}{2}; \quad \tilde{z} = \frac{\tilde{z}_1 + i\tilde{z}_2}{2};
\end{aligned} \tag{17}$$

прямая черта означает усреднение по периоду. В этом можно убедиться непосредственной проверкой (это же становится ясным, если выражения (17) подставить в четвертое уравнение системы (2), из которого при $\mu_3 \ll 1$ следует, что $a = -2\overline{(x + y)\dot{z}}$). Подставляя (17) в (16) и учитывая, что $f_0 + \overline{(x + y)\dot{z}}$ — вещественная постоянная, получаем из условия совместности

$$\varkappa_3 = B\left(\frac{\gamma_1}{\varkappa_1} + \frac{\gamma_2}{\varkappa_2}\right), \tag{18}$$

где $\varkappa_k = -\omega^2 - i\omega\mu_k + \varepsilon_k$ $(k = 1, 2, 3;\ \varepsilon_3 = 1)$; B — вещественное число. Отсюда

$$\frac{\operatorname{Re}\varkappa_3}{\operatorname{Im}\varkappa_3} = \frac{\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma_1}{\varkappa_1} + \frac{\gamma_2}{\varkappa_2}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_1}{\varkappa_1} + \frac{\gamma_2}{\varkappa_2}\right)}. \tag{19}$$

Соотношение (19) есть алгебраическое уравнение для ω. Учитывая (3), его можно представить (см. Дополнение) в виде

$$\Phi(v) = (\gamma_1 + \gamma_2)\, v^3 - (2\gamma_1 + \gamma_2)\, \Delta\varepsilon v^2 + \\ + (\gamma_2\mu_1^2 + \gamma_1\mu_2^2 + \gamma_1\Delta\varepsilon^2)\, v - \gamma_2\mu_1^2\Delta\varepsilon = 0, \qquad (20)$$

где $v = \omega^2 - \varepsilon_1$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$; $\Delta\varepsilon^2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2$. Каждый вещественный корень полинома $\Phi(v)$ определяет частоту возможных синусоидальных колебаний.

Общие выражения для амплитуд этих колебаний громоздки и не представляют интереса для настоящего рассмотрения. Поэтому мы не будем их приводить. Отметим лишь, что зависимость амплитуды колебаний электрического поля от начального числа активных молекул определяется соотношением

$$f_0 = f_{0\,\text{пор}}\,(1 + A^2), \qquad (21)$$

где $A^2 = [(\tilde{x}_1 + \tilde{y}_1)^2 + (\tilde{x}_2 + \tilde{y}_2)^2]/2$. При этом неравенство $f_0 > f_{0\,\text{пор}}$ и условие (20) необходимы и достаточны для существования нетривиальных положений равновесия уравнений (15).

Количество вещественных корней полинома $\Phi(v)$ определяется знаком его дискриминанта D (при $D > 0$ — один вещественный корень). Этот дискриминант имеет простой вид в случае одинаковых коэффициентов связи резонансных типов колебаний с веществом ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$);

$$D = \frac{1}{216}\left(\mu_1^2 + \mu_2^2 - \frac{1}{2}\Delta\varepsilon^2\right)^3 + \frac{\Delta\varepsilon^2}{64}\,(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2. \qquad (22)$$

Уравнение $D(\Delta\varepsilon^2) = 0$ имеет единственное положительное решение для любых μ_1, μ_2 и определяет критическое значение расстройки собственных частот резонатора. При этом $D(\Delta\varepsilon^2) > 0$ при $\Delta\varepsilon^2 < \Delta\varepsilon^2_{\text{кр}}$, $D(\Delta\varepsilon^2) < 0$ при $\Delta\varepsilon^2 > \Delta\varepsilon^2_{\text{кр}}$.

Рассмотрим некоторые случаи.

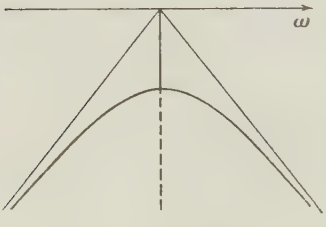
1). $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ (одинаковые типы колебаний).

Имеем $\Phi(v) = \gamma\,(2v - \Delta\varepsilon)\,(v - v_2)\,(v - v_3)$, где $v_{2,3} = \frac{\Delta\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta\varepsilon^2}{4} - \mu^2}$.

Отсюда $\Delta\varepsilon^2_{\text{кр}} = 4\mu^2$ или

$$\Delta\omega_{\text{кр}}/\omega = 1/Q, \qquad (23)$$

Q — добротность рассматриваемых типов колебаний. Расположение частот возможных колебаний для любого значения расстройки собственных частот можно получить при помощи рисунка. Пересечение прямой, параллельной оси ω, с тонкими прямыми линиями, идущими под углом 45° к оси ω, дает расположение собственных частот, с толстыми и пунктирными — расположение частот возможных колебаний.



2. $\mu_2 \ll \mu_1$.

В этом случае $\Phi(v) = 2\gamma\,(v - \Delta\varepsilon)\,(v - v_2)\,(v - v_3)$, где $v_{2,3} = \frac{\Delta\varepsilon}{4} \pm (1/4)\sqrt{\Delta\varepsilon^2 - 8\mu_1^2}$ (для простоты положено $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$). Имеем

$$\Delta\omega_{\text{кр}}/\omega = \sqrt{2}/Q_1, \qquad (24)$$

Q_1 — добротность первого типа колебаний.

3. $\gamma_2 = 0$.

Полином $\Phi(v)$ имеет один вещественный корень $v = 0$, что соответствует единственной возможной частоте колебаний, совпадающей с собственной частотой первого типа колебаний. Аналогично при $\gamma_1 = 0$ полином $\Phi(v)$ имеет один вещественный корень, соответствующий колебаниям на второй собственной частоте.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Практически реализуемым синусоидальным колебаниям молекулярного генератора соответствуют только устойчивые положения равновесия системы (15). Устойчивость гармонических колебаний генератора с одной собственной частотой резонатора в пределах ширины линии излучения рассмотрена в работах [7, 8, 9]. В силу автономности исходных уравнений любое положение равновесия этой системы в ее фазовом пространстве принадлежит замкнутой фазовой траектории (орбите предельного цикла). С другой стороны, каждая точка орбиты является положением равновесия уравнений (15). Поэтому характеристический полином этих уравнений, линеаризованных в окрестности любого положения равновесия, будет иметь один нулевой корень. Этот корень соответствует «безразличным» движениям вдоль орбиты предельного цикла. Остальные три корня определяют орбитную устойчивость цикла, т. е. устойчивость по отношению к малым отклонениям от орбиты.

Ниже мы ограничимся случаем одинаковых резонансных типов колебаний ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$). Будем называть «центральными» колебаниями такие колебания, для которых $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$ (рисунок), соответственно «боковыми» — для которых $\zeta_1\zeta_2 = 1$. Используя (16) и (6), находим

$$\gamma f_0 = \chi(1 + A^2), \tag{25}$$

где $\chi = (1 + \zeta^2)/2$ для центральных колебаний и $\chi = 1$ для боковых колебаний. Из (25) видно, что $f_{0\,\text{пор}} = \chi/\gamma$ (см. (21)).

Линеаризуя как обычно систему (15) и учитывая (25), находим характеристическое уравнение для центральных колебаний:

$$(d^2 + \zeta^2 - \varkappa^2)^2 - 4(\chi - \varkappa)^2(d - \varkappa)^2 = 0, \tag{26}$$

где $d = \varkappa - 1 - \lambda$; $\varkappa = \chi/(1 + A^2)$. Это уравнение (относительно λ) легко решается. Его ненулевые корни имеют вид

$$\lambda_1 = -(1 - \zeta^2),$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{(1-\zeta^2)}{2(1+A^2)}\left\{1 \pm (1 - A^2)\sqrt{1 - \frac{16\zeta^2A^2}{(1-\zeta^2)^2(1-A^2)^2}}\right\} - \frac{(3+\zeta^2)A^2}{2(1+A^2)}. \tag{27}$$

Нетрудно убедиться в том, что $\operatorname{Re}\lambda_{2,3} < 0$ при $\zeta^2 < 1$ для любых значений A^2. Поэтому положения равновесия системы (15), соответствующие центральным колебаниям, устойчивы, если расстройка собственных частот резонатора меньше критической, и неустойчивы, если эта расстройка больше критической. На рисунке неустойчивым центральным колебаниям соответствует пунктирная линия.

Аналогично получаем характеристическое уравнение для боковых колебаний:

$$\lambda\left\{\lambda^3 + \frac{4A^2}{1+A^2}\lambda^2 + 4\left(\bar{\zeta}^2 - \frac{1}{1+A^2}\right)\lambda + \frac{8A^2}{1+A^2}(\bar{\zeta}^2 - 1)\right\} = 0. \tag{28}$$

Здесь $\bar{\zeta} = (\zeta_1 + \zeta_2)/2$. Учитывая, что $\bar{\zeta}^2 > 1$ (при $\zeta_1 \neq \zeta_2$) и используя условия Раута — Гурвица, легко убедиться в том, что $\operatorname{Re}\lambda_{1,2,3} < 0$ ($\lambda_{1,2,3}$ — ненулевые корни уравнения (28)). Таким образом, положения равновесия, соответствующие боковым колебаниям, всегда устойчивы.

Уравнения (15) были получены в предположении, что решения системы (2) близки к решениям вида (4). Если начальное число активных молекул достаточно велико (так, что $\mu_2 f_0 \gtrsim 1$), то, как легко видеть, решения системы (2) (при условиях (3)) не будут близки к виду (4). Это, однако, не является существенным в вопросе о самих предельных циклах (опреде-

ляющих синусоидальные колебания), так как выражения (16) могут быть получены при этих условиях для любых f_0 сразу из системы (2). Однако при достаточно большой амплитуде колебаний электрического поля может оказаться, что устойчивость этих циклов не эквивалентна устойчивости положений равновесия системы (15).

Таким образом, если начальное число активных молекул не слишком велико, то частоты всех устойчивых колебаний молекулярного генератора (в случае одинаковых типов колебаний резонатора) изображаются на рисунке толстыми сплошными линиями. При этом, если расстройка собственных частот резонатора меньше критической (23), то частота колебаний единственна; в противном случае эта частота определяется начальными условиями и является одной из двух, отображенных на рисунке. Если расстройка значительно превышает критическую, то устойчивый режим синусоидальных колебаний должен наблюдаться на каждой из собственных частот.

ДОПОЛНЕНИЕ

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что равенство (19) эквивалентно уравнению

$$L(\omega) = -\mu_3(\gamma_1+\gamma_2)(u-\varepsilon_1)^3 - (\gamma_1\mu_1+\gamma_2\mu_2)(u-\varepsilon_1)^2(u-1) +$$
$$+ \Delta\varepsilon\,[\mu_3(2\gamma_1+\gamma_2)(u-\varepsilon_1)^2 + 2\gamma_1\mu_1(u-\varepsilon_1)(u-1)] - \mu_3\,[u(\gamma_2\mu_1^2+\gamma_1\mu_2^2)+\gamma_1\Delta\varepsilon^2]\times$$
$$\times(u-\varepsilon_1) - [u(\gamma_2\mu_1^2\mu_2+\gamma_1\mu_2^2\mu_1)+\gamma_1\mu_1\Delta\varepsilon^2](u-1) + u\gamma_2\mu_3\mu_1^2\Delta\varepsilon = 0, \qquad (29)$$

где $u=\omega^2$. Заменяя в (29) u единицей (там, где u не входит в разность $(u-\varepsilon_1$ или $(u-1))$ и используя (3), получаем приближенное выражение $\Phi(v) = -L(\omega)/\mu_3$, совпадающее с (20). Можно показать, что равенство (20) как соотношение, определяющее частоты возможных синусоидальных колебаний, справедливо при любом расположении собственных частот резонатора в пределах ширины линии излучения (т. е. при $|\varepsilon_1-1|, |\varepsilon_2-1| \lesssim \mu_3$).

Автор глубоко благодарен Н. Г. Басову, Ф. В. Бункину, А. Н. Ораевскому за постановку задачи и полезные дискуссии в процессе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. L. Schawlow, C. H. Townes, Phys. Rev., 1958, 112, 6, 1940.
2. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, Успехи физ. наук, 1960, 72, 2, 161.
3. А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 1958, 34, 6, 1658.
4. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 4, 718.
5. В. М. Файн, ЖЭТФ, 1957, 33, 4,945.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, 1959.
7. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 10, 1288.
8. Х. Ю. Халдре, Р. В. Хохлов, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, 1, 5—6, 60.
9. А. С. Гуртовник, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, 1, 5—6,83.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
27 XII 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 10

О НОВОМ ПРИНЦИПЕ УСИЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СВЧ НА ФЕРРИТАХ

В. А. Фабриков

Рассмотрен новый принцип усиления колебаний СВЧ на ферритах, связанный с нелинейными гиромагнитными эффектами нутационного типа.

1. Нелинейные гиромагнитные эффекты в ферритах на СВЧ можно разделить в соответствии с принципами их использования на две группы, одна из которых связана с частотной, а другая — с угловой характеристиками прецессионного движения спиновых моментов. Первая группа эффектов, используемая для создания различного типа параметрических ферритовых усилителей СВЧ, подробно рассмотрена в литературе (см., например, работу [1]). Эффекты второго типа, называемые нутационными, исследованы в значительно меньшей степени.

Ранее было показано, что нелинейные явления нутационного типа можно использовать для усиления электромагнитных сигналов промежуточной частоты [2] и повышения эффективности работы смесителей колебаний СВЧ [3]. В работе [3] отмечена также возможность получения нового эффекта — усиления мощности одного из смешиваемых сигналов СВЧ за счет другого, более сильного, сигнала. Этот эффект, который можно рассматривать как новый принцип усиления колебаний СВЧ на ферритах (особенностью его является то, что усиление имеет место только при наличии в среде магнитных потерь), анализируется в настоящей работе. Анализ проводится на основе решения уравнений движения гиромагнитных моментов намагниченного ферритового материала под воздействием двух поперечно-поляризованных сигналов СВЧ близкой частоты и продольного переменного поля реакции. Решение задачи ищется в системе координат, вращающейся синхронно с постоянным по величине магнитным моментом образца.

2. Рассмотрим ферритовый образец, находящийся под воздействием постоянного магнитного поля $\vec{H}_0 = \vec{i}_z H_0$, достаточно сильного для того, чтобы привести материал в состояние магнитного насыщения. Под H_0 будем понимать эффективное значение поля внутри образца с учетом размагничивающих факторов формы образца. Предположим, что наряду с постоянным полем $\vec{H}_0$ на образец воздействует некоторое произвольно ориентированное малое переменное поле $\vec{h}$, т. е. $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$ и $h \ll H_0$. Тогда магнитный момент образца $\vec{M}$ можно рассматривать как целое и записывать его уравнения движения в векторной форме в виде [4]

$$\dot{\vec{M}} = \gamma [\vec{H}\vec{M}] - \vec{R}, \qquad (1)$$

где учитывающий потери член $\vec{R}$ имеет составляющие $R_x = M_x/T_2$, $R_y = M_y/T_2$, $R_z = (M_z - M_0)/T_1$ [5, 6]. Здесь $\gamma = 1{,}76 \cdot 10^7$ $1/эрс \cdot сек$ — абсолютная величина гиромагнитного отношения электронного спина; T_1 и T_2 — времена продольной и поперечной релаксации, характеризующие интенсивность процессов затухания в материале; M_0 — равновесная

величина магнитного момента в постоянном поле H_0. Точка над символом означает операцию дифференцирования по времени t, а квадратные скобки — векторное произведение соответствующих величин.

Приведенная выше форма записи уравнений движения магнитного момента не предполагает наложения каких-либо ограничений на величины T_1 и T_2, и три скалярных уравнения, соответствующие векторному уравнению (1), являются в общем случае независимыми. Однако в большинстве практических применений абсолютную величину магнитного момента M, по-видимому, можно считать неизменяющейся под воздействием

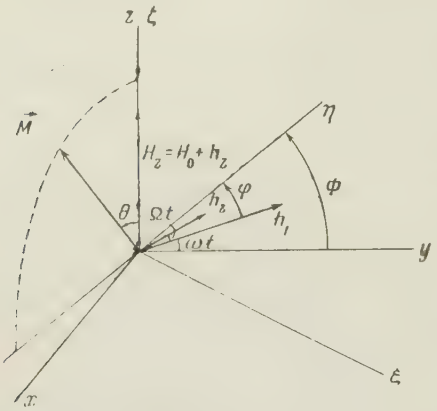


Рис. 1. Схематическое изображение прецессирующего магнитного момента $\vec{M}$ и воздействующих на него магнитных полей $H_z = H_0 + h_z$ и $h_x + ih_y = h_1 e^{i\omega t} + h_2 e^{i(\omega+\Omega)t}$ во вращающейся системе координат ξ, η, ζ

переменного поля, полагая $M = M_0$. Это условие эквивалентно существованию определенной связи между величинами T_1 и T_2 ($T_2 \simeq 2T_1$) и между величинами m_x, m_y, m_z, где $\vec{m} = \vec{M} - \vec{M}_0$. Из трех уравнений движения независимыми при этом оказываются только два, что делает удобным геометрическое рассмотрение задачи во вращающейся системе координат, неподвижной относительно вектора магнитного момента $\vec{M}$.

Введем в рассмотрение наряду с декартовой системой координат x, y, ортогональную систему осей ξ, η, ζ с ортами $\vec{i}_\xi$, $\vec{i}_\eta$, $\vec{i}_\zeta$, фиксированную относительно движущегося вектора магнитного момента $\vec{M}$. Ось ζ совместим с направлением постоянного магнитного поля $\vec{i}_z H_0$, а ось η расположим в плоскости векторов $\vec{M}$ и $\vec{H}_0$ так, чтобы угол между $\vec{M}$ и $\vec{i}_\eta$ был острым (рис. 1). Через Φ обозначим угол между осями ξ и x (или η и y), а через Θ — угол между $\vec{M}$ и $\vec{i}_\zeta = \vec{i}_z$. Углы отсчитываются в направлении стрелок, обозначенных на рис. 1. Очевидно, что $\Phi = \Phi(t)$. В общем случае имеем также $\Theta = \Theta(t)$.

Не накладывая пока каких-либо дополнительных ограничений на продольную составляющую переменного поля $\vec{h}$, будем считать его поперечные составляющие гармоническими и поляризованными по кругу, полагая

$$h_x = h_1 \cos \omega t, \qquad h_y = h_1 \sin \omega t$$

или, в комплексной форме записи,

$$h_x + ih_y = h_1 e^{i\omega t}, \qquad (2)$$

где i — мнимая единица. Рассмотрение переменных полей только круговой поперечной поляризации при математическом анализе явлений, протекающих в условиях ферромагнитного резонанса, мало сказывается на общности получаемых результатов. Форму записи (2), удобную при он

сании полей круговой поляризации, не следует смешивать с символическим представлением величин, имеющих гармоническую зависимость от времени.

Ограничение полями круговой поляризации позволяет представить поперечные составляющие поля $\vec{h}$ вектором $\vec{h}_1$ в плоскости xy, вращающимся в неподвижной системе координат с угловой частотой ω. Угол $\varphi = \Phi - \omega t$, определяющий положение вектора $\vec{h}_1$ во вращающейся системе координат ξ, η, ζ, в общем случае также нельзя считать постоянным.

Обозначим через ω' мгновенную угловую скорость вращения вектора $\vec{M}$ в неподвижной системе координат. Из геометрических соображений легко видеть, что векторы $\vec{H}$, $\vec{M}$ и $\vec{\omega}'$ в системе координат ξ, η и ζ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{i}_\xi h_1 \sin\varphi + \vec{i}_\eta h_1 \cos\varphi + \vec{i}_\zeta (H_0 + h_z), \\ \vec{M} &= -M(\vec{i}_\eta \sin\Theta - \vec{i}_\zeta \cos\Theta), \\ \vec{\omega}' &= -\vec{i}_\xi \dot{\Theta} + \vec{i}_\zeta \dot{\Phi}. \end{aligned} \tag{3}$$

При этом

$$\frac{\dot{\vec{M}}}{M} = \frac{1}{M}[\vec{\omega}'\vec{M}] = \vec{i}_\xi \sin\Theta\dot{\Phi} - \vec{i}_\eta \cos\Theta\dot{\Theta} - \vec{i}_\zeta \sin\Theta\dot{\Theta},$$

$$\frac{[\vec{H}\vec{M}]}{M} = \vec{i}_\xi \{h_1 \cos\Theta\cos\varphi + \sin\Theta(H_0 + h_z)\} - \vec{i}_\eta h_1 \cos\Theta\sin\varphi - \vec{i}_\zeta h_1 \sin\Theta\sin\varphi. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), приходим к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно независимых переменных φ и Θ [7]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= (\gamma H_0 - \omega) + \gamma h_z + \gamma h_1 \operatorname{ctg}\Theta\cos\varphi, \\ \dot{\Theta} &= \gamma h_1 \sin\varphi - \frac{\operatorname{tg}\Theta}{T_2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Связь между новыми переменными φ, Θ и старыми M_x, M_y, M_z дается соотношениями

$$\begin{aligned} M_x + iM_y &= -M\sin\Theta e^{i\Phi}, \\ M_z &= M\cos\Theta. \end{aligned} \tag{6}$$

3. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести специальное обозначение для безразмерного параметра

$$x = (\omega - \gamma H_0)\, T_2 = \frac{H_{\text{рез}} - H_0}{\Delta H}, \tag{7}$$

характеризующего близость к состоянию ферромагнитного резонанса. Здесь $H_{\text{рез}} = \omega/\gamma$ — резонансное значение намагничивающего поля относительно сигнала частоты ω и $\Delta H = 1/\gamma T_2$ — полуширина линии ферромагнитного резонанса.

Уравнения (5) легко решаются в том случае, когда $h_z = 0$ и, следовательно, $\dot{\varphi} = \dot{\Theta} = 0$. Решение это с учетом новых обозначений имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_0 &= \frac{1}{x}, \\ \operatorname{tg}\Theta &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{h_1}{\Delta H}. \end{aligned} \tag{8}$$

При $h_z \neq 0$ точное решение уравнений (5) достаточно сложно. Однако можно найти приближенное решение этих уравнений, рассматривая h_z как малое возмущение системы, невозмущенное состояние которой характеризуется равенствами (8) *. Разлагая правые части уравнений (5) в ряд Тейлора в точке φ_0, Θ_0 и отбрасывая все члены второго и более высокого порядков малости, приходим к двум линейным дифференциальным уравнениям относительно величин $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0$ и $\Theta_1 = \Theta - \Theta_0$:

$$T_2\dot{\varphi}_1 + \varphi_1 = \frac{h_z}{\Delta H} - x\sqrt{1+x^2}\,\frac{\Delta H}{h_1}\,\Theta_1,$$
$$T_2\dot{\Theta}_1 + \Theta_1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{h_1}{\Delta H}\,\varphi_1. \qquad (9)$$

Под корнем квадратным в уравнениях (9), строго говоря, нужно было бы писать $1 + x^2 + \left(\frac{h_1}{\Delta H}\right)^2$, но мы пренебрегаем величиной $(h_1/\Delta H)^2$, полагая

$$\left(\frac{h_1}{\Delta H}\right)^2 \ll 1. \qquad (10)$$

Решение уравнений (9) при заданном h_z достаточно просто и позволяет определить реакцию гиромагнитной среды на воздействие слабого модулирующего сигнала, описываемую в направлении оси z в случае синусоидального поля h_z комплексной магнитной восприимчивостью среды на частоте этого поля [7].

Если на ферритовый материал одновременно воздействуют два поперечных магнитных поля круговой поляризации, т. е.

$$h_x + ih_y = h_1 e^{i\omega t} + h_2 e^{i(\omega+\Omega)t}, \qquad (11)$$

то выражение для поля $\vec{H}$ во вращающейся системе координат примет более общий вид:

$$\vec{H} = \vec{i}_\xi\{h_1\sin\varphi - h_2\sin(\Omega t - \varphi)\} + \vec{i}_\eta\{h_1\cos\varphi + h_2\cos(\Omega t - \varphi)\} + \vec{i}_\zeta(H_0 + h_z). \qquad (12)$$

Начальный фазовый сдвиг для простоты рассмотрения приравнен в формулах (11) и (12) нулю, что несущественно. Рассматривая только такие случаи, в которых $h_2 \ll h_1$, формулы (8) можно оставить без изменения, а уравнения (9) следует заменить более общими уравнениями

$$T_2\dot{\varphi}_1 + \varphi_1 = \frac{h_z}{\Delta H} - x\sqrt{1+x^2}\,\frac{\Delta H}{h_1}\,\Theta_1 + \frac{h_2}{h_1}\sqrt{1+x^2}\cos(\Omega t - \varphi_0),$$
$$T_2\dot{\Theta}_1 + \Theta_1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{h_1}{\Delta H}\,\varphi_1 - \frac{h_2}{\Delta H}\sin(\Omega t - \varphi_0). \qquad (13)$$

Определив из уравнений (13) параметры φ_1 и Θ_1, можно найти выражения для интересующих нас переменных составляющих магнитного момента m_x, m_y, m_z по формулам

$$m_x + im_y = -M\sin\Theta e^{i\Phi} \simeq -M(\sin\Theta_0 + \nu)\,e^{i(\omega t+\varphi_0)},$$
$$m_z = M(\cos\Theta - \cos\Theta_0) \simeq -M\sin\Theta_0\Theta_1, \qquad (14)$$

где

$$\sin\Theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{h_1}{\Delta H};$$
$$\nu = \Theta_1 + i\sin\Theta_0\varphi_1. \qquad (15)$$

* Возмущение можно считать малым, если $h_z \ll \Delta H$. В Приложении рассмотрен случай, когда h_z не обязательно мало по сравнению с ΔH.

Таким образом, нас будут интересовать в дальнейшем переменные величины ν и Θ_1. Уравнения (13) перепишем относительно этих величин в виде

$$T_2\dot{\nu} + (1 + ix)\,\nu = i\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{h_1 h_z}{(\Delta H)^2} + i\frac{h_1}{\Delta H}e^{i(\Omega t-\varphi_0)},$$

$$T_2^2\ddot{\Theta}_1 + 2T_2\dot{\Theta}_1 + (1 + x^2)\,\Theta_1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{h_1 h_z}{(\Delta H)^2} +$$

$$+ \frac{h_2}{2\Delta H}\{(x + i - \Omega T_2)\,e^{i(\Omega t-\varphi_0)} + (x - i - \Omega T_2)\,e^{-i(\Omega t-\varphi_0)}\}, \qquad (16)$$

наиболее удобном для анализа. Правая часть последнего выражения содержит сумму двух комплексно-сопряженных величин.

4. До сих пор мы не накладывали на переменную величину h_z, входящую в уравнения (16), никаких ограничений, кроме требования ее малости ($h_z \ll H_0$), понимая под h_z произвольную по спектральному составу переменную составляющую магнитного поля $H_z = H_0 + h_z$, определяющего резонансные характеристики материала относительно поперечно-поляризованных полей СВЧ на частотах, близких к собственной частоте материала γH_z. Модуляция намагничивающего поля H_z может осуществляться воздействием на ферритовый образец внешнего сигнала, магнитное поле которого поляризовано в направлении оси z, но может быть также обусловлена реакцией образца или взаимодействующего с образцом резонансного контура на изменение намагниченности материала в направлении этой оси.

В настоящей работе нас будет интересовать именно последний случай, который уже рассматривался ранее [8] с точки зрения возможности и условий возникновения в ферритовом образце собственных колебаний намагниченности под воздействием достаточно мощного сигнала СВЧ поперечной поляризации. При одновременном воздействии на ферритовый образец двух поперечно-поляризованных сигналов СВЧ, один из которых значительно превосходит другой по величине, наличие поля реакции может привести, как показано ниже, к возникновению наряду с эффектом смешения еще одного нелинейного эффекта — усиления слабого сигнала СВЧ за счет сильного сигнала. Дальнейшее рассмотрение сводится к анализу полученных выше уравнений (14) и (16) для частных случаев, соответствующих двум наиболее характерным из возможных видов связи между входящими в уравнение (16) величинами h_z и Θ_1.

С л у ч а й 1. Поле h_z есть поле реакции резонансного контура, взаимодействующего с ферритовым образцом (рис. 2). Если контур настроен на частоту Ω, совпадающую с разностной частотой двух сигналов СВЧ, воздействующих на образец, то, пренебрегая высшими гармониками колебаний m_z, поле реакции контура можно представить в виде [8]

$$h_z = -\eta\frac{L}{R}\dot{m}_z = \eta Q M \sin\Theta_0\dot{\Theta}_1 T_2, \qquad (17)$$

где Q — добротность контура на частоте $1/T_2$; η — коэффициент связи контура с образцом, близкий к коэффициенту заполнения. Подставляя (17) в (16) и вводя дополнительные обозначения

$$y = \Omega T_2, \quad a = \frac{M h_1^2}{(\Delta H)^3} \qquad (18)$$

для часто встречающихся комплексов величин, приходим к уравнениям

$$T_2\dot{\nu} + (1 + ix)\,\nu = i\eta Q\frac{a}{1+x^2}\dot{\Theta}_1 T_2 + i\frac{h_2}{\Delta H}e^{i(\Omega t-\varphi_0)},$$

$$T_2^2\ddot{\Theta}_1 + \left(2 - \eta Q a\frac{x}{1+x^2}\right)\dot{\Theta}_1 T_2 + (1 + x^2)\,\Theta_1 =$$

$$= \frac{h_2}{2\Delta H}\{(x - y + i)\,e^{i(\Omega t-\varphi_0)} + (x - y - i)\,e^{-i(\Omega t-\varphi_0)}\}. \qquad (19)$$

Решение этих уравнений (в установившемся режиме) имеет вид

$$\Theta_1 = \frac{h_2}{2\Delta H}\left\{\frac{x-y+i}{1+x^2-y^2+2iy\left(1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{x}{1+x^2}\right)}e^{i(\Omega t-\varphi_0)}+\right.$$
$$\left.+\frac{x-y-i}{1+x^2-y^2-2iy\left(1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{x}{1+x^2}\right)}e^{-i(\Omega t-\varphi_0)}\right\}, \qquad (20)$$

$$\nu = \frac{h_2}{\Delta H}\left\{\frac{1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{y}{1+x^2}\left(\frac{1-i(x-y)}{1+x^2-y^2+2iy\left(1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{x}{1+x^2}\right)}\right)}{x+y-i}e^{i(\Omega t-\varphi_0)}+\right.$$
$$\left.+\frac{Q\,a\,y}{2(1+x^2)}\frac{1-i(x+y)}{(x-y-i)\left(1+x^2-y^2-2iy\left(1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{x}{1+x^2}\right)\right)}e^{-i(\Omega t-\varphi_0)}\right\}.$$

Последнее из выражений (20) позволяет сразу же определить комплексную магнитную восприимчивость образца χ_2 относительно поля частоты

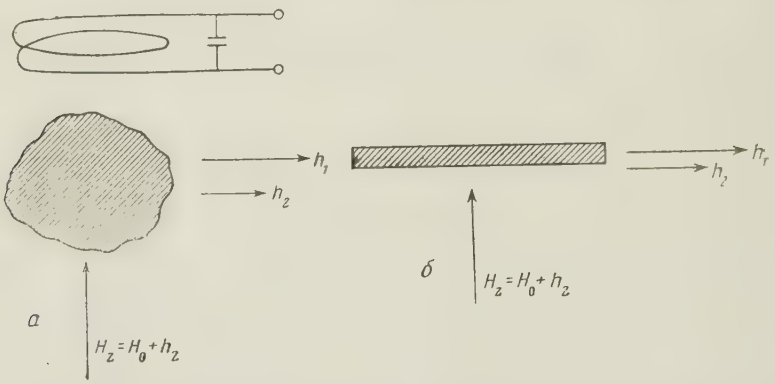


Рис. 2. Два характерных случая связи между продольно-поляризованным переменным полем h_z и соответствующей составляющей намагниченности образца m_z:

а — поле h_z есть поле реакции резонансного контура, взаимодействующего с ферритовым образцом; б — поле h_z есть размагничивающее поле формы образца

$\omega + \Omega$. Действительно, подставляя (20) в (14), легко убедиться в том, что χ_2 совпадает с коэффициентом при экспоненте $\exp i(\Omega t - \varphi_0)$ в этом выражении, умноженным на $-M/h_2$, т. е.

$$\chi_2 = -\frac{M}{\Delta H}\frac{1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{y}{1+x^2}\left(\frac{1-i(x-y)}{1+x^2-y^2+2iy\left(1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{x}{1+x^2}\right)}\right)}{x+y-i}. \qquad (21)$$

Если

$$\chi_2 = \chi_2' - i\chi_2'', \qquad (22)$$

то

$$\chi_2'' = \frac{M}{\Delta H(1+(x+y)^2)}\left\{1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{y}{1+x^2}\frac{1-(x^2-y^2)^2-4xy\left(1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{x}{1+x^2}\right)}{(1+x^2-y^2)^2+4y^2\left(1-\eta Q\frac{a}{2}\frac{x}{1+x^2}\right)^2}\right\}. \qquad (23)$$

При определенных соотношениях между величинами x, y и достаточно большой величине a мнимая часть комплексной восприимчивости χ_2'' может стать отрицательной, что соответствует усилению слабого сигнала на частоте $\omega + \Omega$. Действительно, положим $x = 1$, $y = -2$ и $\eta a Q = 6$. Тогда $\chi_2'' = -1{,}75\frac{M}{\Delta H}$. График зависимости величины χ_2'' от y при $\eta a Q = 6$ приведен на рис. 3. Этот график может служить характеристикой частотной диапазонности эффекта при условии, что резонансный контур перестраивается в соответствии с изменением частоты Ω.

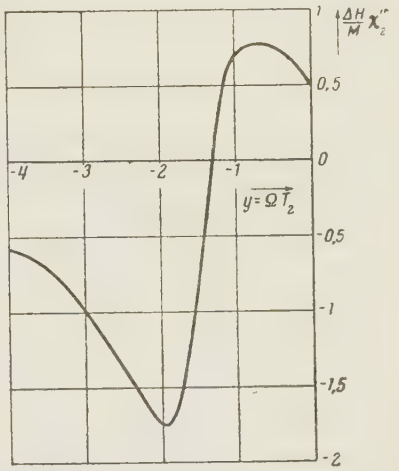


Рис. 3. Зависимость мнимой части комплексной магнитной восприимчивости образца χ_2'' относительно слабого сигнала частоты $\omega + \Omega$ от величины $y = \Omega T_2$ для случая, когда поле h_z создается резонансным контуром, настроенным на частоту Ω ($\omega = \gamma H_0$, $\eta a Q = 6$)

Случай 2. Поле h_z есть размагничивающее поле формы образца. Если образец представляет собой тонкую пластину, намагничиваемую по короткому направлению, то

$$h_z = -m_z. \tag{24}$$

Подстановка (24) в (16) дает

$$T_2\dot{\nu} + (1 + ix)\,\nu = i\frac{a}{1+x^2}\,\Theta_1 + i\frac{h_2}{\Delta H}e^{i(\Omega t - \varphi_0)},$$

$$T_2^2\ddot{\Theta}_1 + 2T_2\dot{\Theta}_1 + \left(1 + x^2 - a\frac{x}{1+x^2}\right)\Theta_1 =$$

$$= \frac{h_2}{2\Delta H}\{(x - y + i)\,e^{i(\Omega t - \varphi_0)} + (x - y - i)\,e^{-i(\Omega t - \varphi_0)}\}, \tag{25}$$

откуда находим

$$\chi_2 = -\frac{M}{\Delta H}\,\frac{1 - \dfrac{a}{2(1+x^2)}\,\dfrac{y - x - i}{1 + x^2 - y^2 - a\dfrac{x}{1+x^2} + 2iy}}{x + y - i}, \tag{26}$$

т. е.

$$\chi_2' = \frac{M}{\Delta H}\,\frac{\dfrac{a}{2(1+x^2)}\,\dfrac{1 + x^2 - y^2 - a\dfrac{x}{1+x^2} - 4xy + (y^2 - x^2)(1 + x^2 - y^2) - x - y}{\left(1 + x^2 - a\dfrac{x}{1+x^2} - y^2\right)^2 + 4y^2} + (x + y)}{1 + (x+y)^2},$$

$$\chi_2'' = \frac{M}{\Delta H}\,\frac{1 - \dfrac{a}{1+x^2}\left\{\dfrac{x\left(y^2 - x^2 - 1 + a\dfrac{x}{1+x^2}\right) - y(1 + y^2 - x^2)}{\left(1 + x^2 - y^2 - a\dfrac{x}{1+x^2}\right)^2 + 4y^2}\right\}}{1 + (x+y)^2}. \tag{27}$$

При $x = 0$ последние выражения принимают более простой вид:

$$\chi_2' = -\frac{M}{\Delta H}\,\frac{y + \frac{y^2-1}{y^2+1}\,\frac{a}{2}}{1+y^2}, \qquad (28)$$

$$\chi_2'' = \frac{M}{\Delta H}\,\frac{1 + \frac{y}{1+y^2}\,a}{1+y^2}.$$

При $a = 6$, $x = 0$ и $y = -0{,}5$ имеем $\chi_2'' = -1{,}12\,\frac{M}{\Delta H}$.

Частотная зависимость χ_2' и χ_2'' для значения $a = 6$ приведена на рис. 4. На этом же рисунке приведены для сравнения частотные зависимости, вычисленные для случая $a = 0$. Несколько большую диапазонность можно получить в случае, когда $x = 0{,}5$.

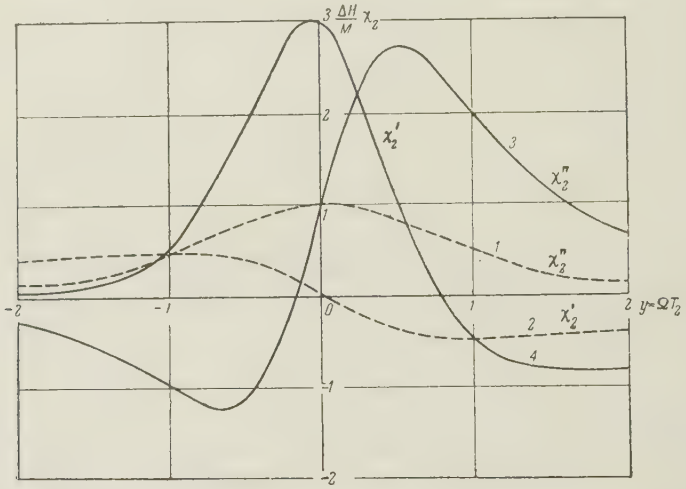


Рис. 4. Зависимость комплексной магнитной восприимчивости образца $\chi_2 = \chi_2' - i\chi_2''$ относительно слабого сигнала частоты $\omega + \Omega$ от величины $y = \Omega T_2$ для случая, когда поле h_z создается за счет размагничивающего действия формы образца:

1, 2 — $H_0 = H_{\text{рез}}$, $a = 0$; *3, 4* — $H_0 = H_{\text{рез}} - \Delta H$, $a = 6$

5. Оценим ориентировочно P_1 — величину мощности накачки на СВЧ, необходимую для того, чтобы достигнуть значения $a = 6$, и получаемый при этом коэффициент усиления слабого сигнала. Предположим, что используется образец иттриевого феррита, размеры которого $3 \times 3 \times 0{,}3$ *мм*^{3}, с намагниченностью насыщения $M = 1750$ *гс* и полушириной резонансной линии $\Delta H = 1$ *эрс*. Тогда

$$P_1 = r_1 h_1^2 = a\,\frac{(\Delta H)^3}{M}\,r_1 = 3{,}43 \cdot 10^{-3}\,r_1. \qquad (2$$

Если образец расположен в волноводе на расстоянии четверти длины волны от закороченного конца, то на длине волны 3 *см* коэффициент связи r_1 между P_1 и h_1^2 можно положить равным 25 *вт*/*эрс*^{2} [2]. При этом $P_1 = 86$ *мвт*.

Усиление слабого сигнала можно оценить коэффициентом

$$K = 1 + \frac{P_r}{P_2}, \qquad (3$$

где через $P_r = -\mu_0 \frac{\chi_2'' h_2^2}{4}(\omega + \Omega) V$ обозначена мощность, генерируемая образцом на частоте $\omega + \Omega$ под воздействием более мощного сигнала частоты ω *. Подставляя в формулу значения $\omega + \Omega = 2\pi \cdot 10^{10}$, $h_2^2 = P_2/r_2$, $V = 2{,}7 \cdot 10^{-9}$ *м*^{3}, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м*, получаем

$$K = 1 - 0{,}34 \frac{\chi_2''}{r_2}. \qquad (31)$$

Если $r_2 = r_1 = 25$ *вт/эрс*^{2} и $\chi_2'' = -M/\Delta H = -1750$, то $K = 25$.

Таким образом, представляется реальным создание на рассмотренном принципе ферритового усилителя мощности колебаний СВЧ, работающего при мощностях накачки менее 100 *мвт* и обеспечивающего коэффициент усиления выше 10 в полосе частот, для которой разностная частота сигнала и местного генератора накачки Ω лежит в пределах нескольких мегагерц.

Автор благодарен А. А. Пистолькорсу, просмотревшему рукопись и высказавшему ряд замечаний по существу работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задача о взаимодействии электромагнитных сигналов с модулированной гиромагнитной средой для случая больших амплитуд модулирующего поля

Исходными являются уравнения Ландау и Лифшица в виде

$$\dot{m}_x + \frac{m_x}{T_2} = -\gamma (H_z m_y - h_y M_z),$$

$$\dot{m}_y + \frac{m_y}{T_2} = \gamma (H_z m_x - h_x M_z), \qquad (I)$$

$$\dot{m}_z + \frac{m_z}{T_1} = \gamma (h_x m_y - h_y m_x). \qquad (II)$$

Обозначения те же, что и в тексте статьи. Вводя новую переменную $N = m_x + i m_y$ и делая подстановку $N = Se^{\int \left(i\gamma H_z - \frac{1}{T_2}\right) dt}$, уравнения (I) приводим к виду

$$N = -i\gamma e^{\int \left(i\gamma H_z - \frac{1}{T_2}\right) dt} \int M_z (h_x + i h_y)\, e^{-\int \left(i\gamma H_z - \frac{1}{T_2}\right) dt} dt. \qquad (III)$$

Величина m_z мала в сравнении с M и учет ее в уравнении (III) несуществен. Подставляя в (III) $M_z \simeq M$ и

$$h_x + i h_y = (h_1 + h_2 e^{i(\Omega t + \delta)})\, e^{i\omega t}, \quad h_z = h_0 \cos \Omega t \qquad (IV)$$

и воспользовавшись известными формулами разложения в ряд [9]

$$e^{\pm iz \cos \Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^k J_k(z)\, e^{ik\Omega t}, \qquad (V)$$

получаем

$$N = -i \frac{M}{\Delta H} e^{i\omega t} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(z)\, e^{ip\Omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{J_k(z)\, h_1 - J_{k-1}(z)\, h_2 e^{i\delta}}{1 + iX_k} e^{ik\Omega t}. \qquad (VI)$$

* Коэффициент K характеризует эффективность работы ферритового элемента в режиме усиления слабого сигнала СВЧ, определяя максимальное усиление сигнала по мощности, которое можно получить при оптимальном согласовании нагрузки с элементами усилительной схемы. Его следует отличать от коэффициента усиления по току (или напряжению) при неизменном сопротивлении нагрузки.

Здесь $X_k = x + ky$; $J_k(z)$ — бесселева функция первого рода k-го порядка от аргумента $z = \frac{h_0}{\Delta H}\frac{1}{y}$. Начальный фазовый угол δ в формулах (IV) и (VI) определен относительно поля h_z.

Выражение (VI) простой перегруппировкой членов приводится к виду

$$N = -i\frac{M}{\Delta H}\sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{i(\omega+l\Omega)t}, \tag{VII}$$

где

$$A_l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^l \frac{J_{k-l}}{1+iX_k}\{J_k h_1 - J_{k-1}h_2 e^{i\delta}\}. \tag{VIII}$$

Полученные соотношения позволяют рассчитать восприимчивость среды χ_1 и χ_2 относительно сигналов частот ω и $\omega+\Omega$ по формулам

$$\chi_1 = -i\frac{M}{\Delta H}\frac{A_0}{h_1} = -i\frac{M}{\Delta H}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{J_k^2 - J_k J_{k-1}\frac{h_2}{h_1}e^{i\delta}}{1+ix_k}, \tag{IX}$$

$$\chi_2 = -i\frac{M}{\Delta H}\frac{A_1}{h_2}e^{-i\delta} = -i\frac{M}{\Delta H}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{J_{k-1}^2 - J_k J_{k-1}\frac{h_1}{h_2}e^{i\delta}}{1+iX_k}. \tag{X}$$

Переписав уравнение (II) в виде

$$\dot{m}_z + \frac{m_z}{T_1} = \gamma\,\mathrm{Im}\{N(h_x - ih_y)\}$$

и воспользовавшись формулами (VIII) и (VII), получаем

$$m_z = -\frac{M}{(\Delta H)^2}\,\mathrm{Re}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{\frac{T_2}{T_1}+ily}e^{il\Omega t}, \tag{XI}$$

где

$$B_0 = A_0h_1 + A_1h_2e^{-i\delta}; \tag{XII}$$

$$B_l = (A_l + A_{-l}^*)h_1 + (A_{l+1}e^{-i\delta} + A_{1-l}^* e^{i\delta})h_2, \qquad l = 1, 2, \ldots.$$

Составляющая m_z на частоте Ω в соответствии с формулами (XI) и (XII) описывается выражением

$$(m_z)_\Omega = -\frac{M}{\Delta H}\,\mathrm{Re}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[h_1h_2(J_k^2e^{i\delta} + J_{k-1}J_{k+1}e^{-i\delta}) - (h_1^2J_kJ_{k+1} + h_2^2J_kJ_{k-2})]\frac{\xi}{(1-iX_k)(1+iX_{k+1})}. \tag{XIII}$$

Коэффициент $\xi = \frac{2+iy}{\frac{T_2}{T_1}+iy}$ в (XIII) при $T_2 = 2T_1$ (условие сохранения величины M) обращается в единицу.

Формулы (IX), (X), (XIII) справедливы практически при любых значениях h_0, h_1 и h_2 (единственным ограничением является условие $m_z \ll M$) *. Они предсказывают ряд новых эффектов, которые должны иметь место при больших амплитудах модулирующего поля h_z. В частности, они объясняют расширение линии ферромагнитного резонанса под воздействием поля h_z, наблюдавшееся в работе [10]. Однако эти формулы несколько громоздки для практического использования.

* Рассмотрение ведется применительно к однородной прецессии. Возможность возникновения высших типов колебаний в расчет не принимается.

Если $h_0 / 2\Delta H \ll y$, то формулы (IX), (X) и (XIII) упрощаются, принимая в первом приближении по величине $\frac{z}{2} = \frac{h_0}{2\Delta H}\frac{1}{y}$ вид

$$\chi_1 = -i\frac{M}{\Delta H}\frac{1}{1+ix}\left\{1+\frac{h_2}{h_1}\frac{h_0 e^{i\delta}}{2\Delta H}\frac{i}{1+i(x+y)}\right\}, \qquad \text{(XIV)}$$

$$\chi_2 = -i\frac{M}{\Delta H}\frac{1}{1+i(x+y)}\left\{1+\frac{h_1}{h_2}\frac{h_0 e^{-i\delta}}{2\Delta H}\frac{i}{1+ix}\right\}, \qquad \text{(XV)}$$

$$m_z = -\frac{M}{(\Delta H)^2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{h_1 h_2 e^{i\delta}}{(1-ix)[1+i(x+y)]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{1}\frac{h_{k+1}^2 h_0}{\Delta H}\frac{X_k}{1+X_k^2}\frac{1}{[1+i(X_k+y)][1-i(X_k-y)]}\right\}. \qquad \text{(XVI)}$$

В случае когда h_z является полем реакции контура или образца и связано с m_z линейным соотношением, выражение (XVI) может служить для определения величины $h_0 e^{-i\delta}$. Подставляя найденное таким образом выражение для $h_0 e^{-i\delta}$ в формулу (XV), можно получить при соответствующих значениях коэффициента линейной связи между h_z и m_z выражения для χ_2, совпадающие при $h_2 \ll h_1$ с теми, которые были выведены в тексте статьи (см. формулы (21) и (27)).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Микаэлян, Проблема создания ферритовых усилителей на сверхвысоких частотах, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 11, 1323.
2. В. А. Фабрикова, О ферритовом усилителе мощности электромагнитных сигналов высокой частоты, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 7, 1203.
3. В. А. Фабрикова, Об эффективности работы ферритовых элементов в качестве смесителей СВЧ в схемах детектирования, Труды 3-й Всесоюзной конференции по ферритам, Минск, июнь 1959, «Ферриты», Сб. статей, АН БССР, Минск, 1960, стр. 534.
4. L. Landau, E. Lifshitz, On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, Phys. Z. Sowjetunion, 1935, 8, 153.
5. Н. Блумберген, О ферромагнитном резонансе в никеле и супермаллое, Сб. Ферромагнитный резонанс, перев. с англ. под ред. С. В. Вонсовского, ИЛ, 1952.
6. Г. В. Скроцкий, В. Т. Шматов, К термодинамической теории резонансных и релаксационных явлений в ферромагнетиках, ЖЭТФ, 1958, 34, 3, 740.
7. В. А. Фабрикова, Возможность усиления гиромагнитной средой мощности слабого модулирующего сигнала, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 2, 190.
8. В. А. Фабрикова, Об условиях возникновения собственных колебаний намагниченности гиромагнитной среды, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 117.
9. Г. В. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы, перев. с англ., ИЛ, 1948, стр. 184.
10. В. А. Фабрикова, В. Т. Кадеева, В. И. Козлова, В. Д. Кудрявцева, Экспериментальное исследование на монокристаллах иттриевого феррита эффектов, связанных с нутационными колебаниями намагниченности, Тезисы докладов на совещании по ферромагнетизму и антиферромагнетизму, Изд. АН СССР, Ленинград, 1961.

Поступила в редакцию
6 XII 1960

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СХЕМЕ ЦЕПИ ОТКЛОНЯЮЩИХ ПЛАСТИН ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ТРУБКИ

А. И. Соколик

Показано, что одноконтурная эквивалентная схема цепи отклоняющих пластин применима только в случае равенства соответствующих параметров L, R, C цепей двух пластин. Предложена эквивалентная схема, отображающая раздельно цепи двух отклоняющих пластин и учитывающая емкость между вводами, индуктивность и сопротивление цепи второго анода. Новая эквивалентная схема проверена методом моделирования.

При осциллографических исследованиях сигналов, претерпевающих резкие изменения за время порядка 10^{-8}—10^{-9} *сек*, необходимо учитывать искажения, обусловленные электрическими параметрами цепи отклоняющих пластин трубки. Эти искажения, как правило, значительно превышают искажения, связанные с конечным временем пролета электронов в поле отклоняющих пластин. Современное рассмотрение влияния параметров цепи пластин на форму напряжения на отклоняющих пластинах дано в работе [1] на основе эквивалентной схемы отклоняющей системы, приведенной на рис. 1, где R — суммарное сопротивление внешней цепи, включая внутреннее сопротивление генератора сигнала; L — индуктивность вводов пластин и проводов, подводящих сигнал; C_0 — емкость отклоняющих пластин.

Если $R < 2\sqrt{L/C_0}$, то при подаче сигнала в форме идеальной ступеньки с амплитудой E напряжение между пластинами изменяется по закону

$$U_C = E\left[1 - e^{at}\left(\frac{a}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right)\right], \tag{1}$$

где

$$a = \frac{R}{2L}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC_0} - \frac{R^2}{4L}}.$$

Будем называть о п т и м а л ь н ы м сопротивление, удовлетворяющее условию

$$R_0 = \sqrt{\frac{2L}{C_0}} = \frac{0{,}22}{f_0 C_0}, \tag{2}$$

где

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}. \tag{3}$$

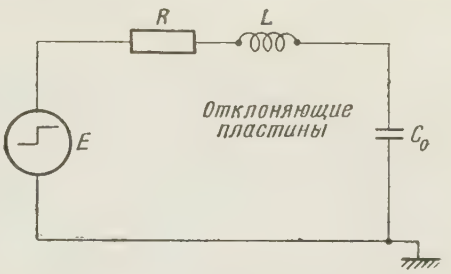
При оптимальном сопротивлении время нарастания напряжения на пластинах от 0,1 до 0,9 E равно

$$t_н = 1{,}52\,R_0 C_0 \simeq \frac{0{,}35}{f_0}. \tag{4}$$

Оно приблизительно в 1,5 раза меньше, чем в случае, когда сопротивление равно критическому. При оптимальном сопротивлении и идеальн крутом фронте входного сигнала имеет место выброс 4%. При конечно длительности фронта входного сигнала величина выброса будет меньше

Внутреннее сопротивление генератора сигнала обычно меньше оптиального; поэтому во избежание чрезмерных выбросов в цепь пластин ключают дополнительные демпфирующие сопротивления.

Если исходить из эквивалентной схемы рис. 1, то кажется, что демпфирующее сопротивление можно с равным результатом включить в цепь юбой из отклоняющих пластин; в ействительности же это далеко не ак. На рис. 2 приведены три осциллограммы прямоугольного импульса



ис. 1. Одноконтурная эквивалентная схема цепи отклоняющих пластин

тительностью 10 *нсек*, записанного с экрана осциллографической трубки 3ЛО5А при различных условиях включения.

Очевидное влияние места включения сопротивлений на форму сигнала риводит к выводу о том, что эквивалентная схема отклоняющей системы должна содержать два контура *RLC*, соответствующих цепям двух отклоняющих пластин. Такая схема, предложенная нами [2], приведена на рис. 3. Элементы, обозначенные индексом 1, относятся к цепи «активной» пластины, а индексом 2 — к цепи заземляемой пластины; C_0 — емкость между пластинами; C_1 и C_2 — емкости пластин относительно заземленных электродов трубки (главным образом относительно второго анода и соединенных с ним экранирующих перегородок); $C_в$ — емкость между вводами, $L_а$ и $R_а$ — индуктивность и сопротивление цепи, соединяющей второй анод

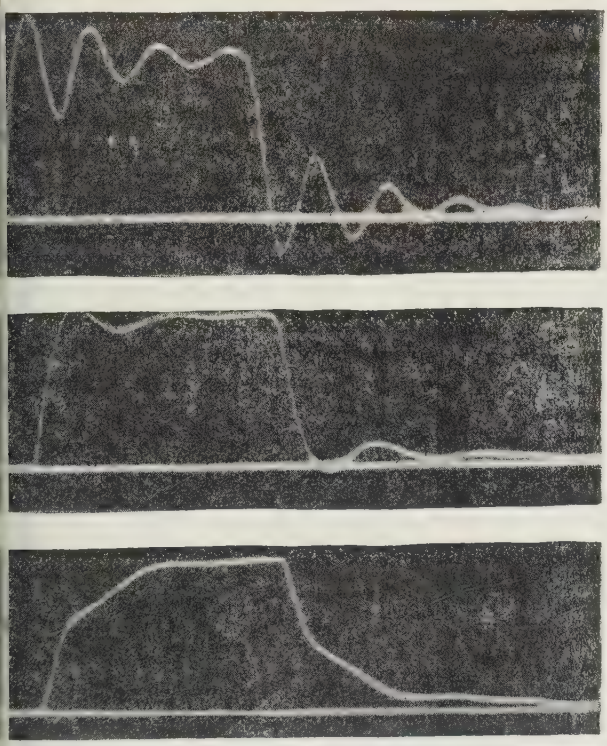
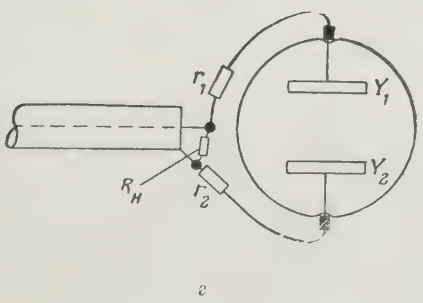


Рис. 2. Осциллограммы прямоугольного импульса длительностью 10^{-8} *сек*, записанного с экрана трубки 13ЛО5А:

а — $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $f_0 = 350$ *Мгц*; *б* — $r_1 = 0$, $r_2 = 240$ *ом*; *в* — $r_1 = 240$ *ом*, $r_2 = 0$; *г* — схема подачи сигнала на пластины. Кабель РК-3, $l = 14$ *м*, $R_н = 75$ *ом*. Длина проводов по 4,5 *см*, все сопротивления типа УЛМ



г

трубки (как внутри, так и вне ее) с наружной жилой кабеля, подводящег сигнал, которую мы принимаем за общую точку (на эквивалентных схе мах — «земля»).

Если сигнал подается на отклоняющие пластины симметрично отно сительно земли, то на схеме рис. 3 эдс генератора сигнала в цепи перво пластины должна быть взята равно $E_1 = E/2$, а в цепь второй пластин должен быть включен второй генера тор, эдс которого $E_2 = -E_1$.

Математический анализ переход ных характеристик предложенны

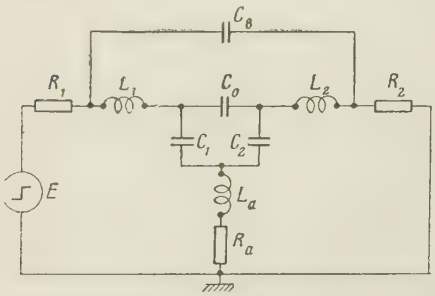


Рис. 3. Двухконтурная эквивалентна схема цепи отклоняющих пластин

эквивалентных схем в общем случае практически трудно осуществим, поэтому эти схемы были исследованы методом моделирования. Емкост C_0, C_1 и C_2 модели были установлены на основе измерений соответствую щих емкостей нижних отклоняющих пластин $D_3 - D_4$ трубки 13ЛО5А индуктивности L_1 и L_2 были определены по частоте собственных коле баний цепи пластин. Величины емкостей и индуктивностей были увеличен по сравнению с натурой в 1000 раз, что дало такое же увеличение ма штаба времени. На рис. 4 приведены осциллограммы, полученные н модели отклоняющей системы, построенной по схеме рис. 3, при разли ных включениях демпфирующего сопротивления, соответствующих усл виям, в которых были получены осциллограммы, показанные на рис.

При моделировании учитывалось активное сопротивление цепи пластин, обусловленное поверхностным эффектом и потерями на излучение. Оно было вычислено по осциллограммам собственных колебаний отклоняющей системы трубки при малых величинах суммарных сопротивлений ($R_1 = R_2 = 13{,}5$ *ом*) и имело величину около 7 *ом*. Сравнение осциллограмм, снятых с экрана трубки и полученных на модели, свидетельствует о том, что эквивалент-

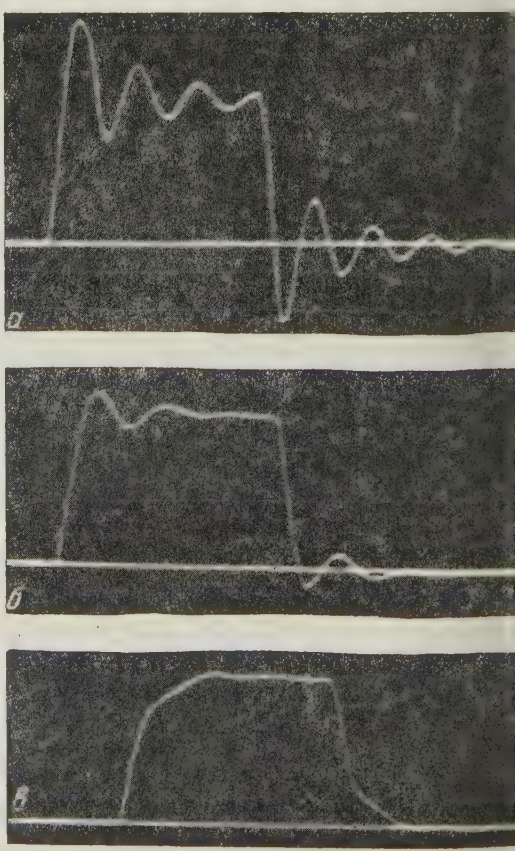


Рис. 4. Осциллограммы, полученные на модели цепи отклоняющих пластин по эквивалентной схеме рис. 3 при $C_0 = 1500$ *пф*, $C_1 = C_2 = 2100$ *пф*, $L_1 = L_2 = 43$ *мкгн*, $C_в = 500$ *пф*, $L_а = 45$ *мкгн*, $R_а = 50$ *ом*. Входной импульс 10 *мксек*. Полные сопротивления в цепях пластин:

а — $R_1 = 44$ *ом*, $R_2 = 7$ *ом*; *б* — $R_1 = 44$ *ом*, $R_2 = 247$ *ом*; *в* — $R_1 = 284$ *ом*, $R_2 = 7$ *ом*

ная схема рис. 3 дает хорошее соответствие с реальной цепью откло-няющих пластин трубки.

Модель, построенная по эквивалентной схеме рис. 3 без элементов $_{в}$, $L_а$, $R_а$, также хорошо воспроизводит форму напряжения на пласти-нах, за исключением случая, когда моделировалось включение демпфирую-щего сопротивления 240 *ом* только в цепь первой пластины. Полученная

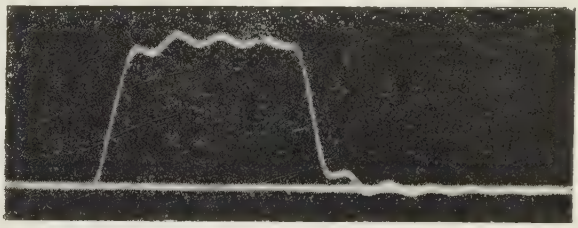


Рис. 5. Осциллограмма, полу-ченная на модели в условиях, ак и для рис. 4, *в*, при $C_в = 0$, $L_а = 0$, $R_а = 0$

ри этом осциллограмма (рис. 5) значительно отличается от осциллограммы ис. 2, *в*; это свидетельствует о том, что в некоторых случаях емкость ежду вводами пластин трубки и полное сопротивление цепи второго нода существенно влияют на форму напряжения на отклоняющих пла-тинах.

Остановимся на случае равенства всех параметров цепей двух пластин. ри $L_1 = L_2 = L$, $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$ операторное изображение апряжения на емкости C_0 при подаче на вход схемы рис. 3 ступеньки апряжения E имеет следующий вид:

$$U_{C_0}(p) = \frac{E}{p^3 2LC_э C_в R + p^2 LC_э + pR(C_э + C_в) + 1}, \tag{5}$$

де

$$C_э = C + 2C_0. \tag{6}$$

Из выражения (5) следует, что для рассматриваемого случая напря-ение на пластинах не зависит от параметров цепи второго анода. Это

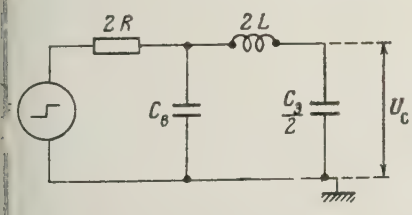


Рис. 6. Эквивалентная схема цепи пластин при $L_1 = L_2 = L$, $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$

ет право принять $R_а = \infty$, что равносильно замене схемы рис. 3 зна-ительно более простой схемой, представленной на рис. 6. Если при ом положить $C_в = 0$, то мы приходим к схеме одиночного контура ис. 1), составленного из элементов $2L$, $2R$ и $C_э/2$, или, что равно-енно, из элементов L, R и $C_э$.

Таким образом, одноконтурная эквивалентная схема отклоняющей стемы, приведенная на рис. 1, может применяться при условии, что противления, индуктивности и емкости в цепях двух пластин равны, и костью между вводами можно пренебречь. При этих условиях справед-вы выражения (1) — (4), если параметрам контура придавать значе-я, указанные выше. В случае равных параметров двух пластин (при $= 0$, $Z_а = 0$) оптимальное значение индуктивностей для получения нимального времени нарастания напряжения на пластинах при допу-

стимом выбросе $\delta = 4\%$ будет равно

$$L_{1\,опт} = L_{2\,опт} = \frac{C_э (R_i + r_{01})}{2}, \qquad (7$$

где R_i — внутреннее сопротивление генератора; r_{01} — сопротивление цепи первой пластины, обусловленное активным сопротивлением ввода и излучением. При величине индуктивности меньше оптимальной выброс уменьшается, но время нарастания напряжения возрастает. В пределе при $L_1 = L_2 = 0$

$$t_н = 0{,}22\,(R_i + r_{01})\,C_э, \qquad (8$$

что в 1,45 раза больше, чем при выполнении условия (7). Но случай равных параметров цепей двух пластин не является оптимальным. Испытания на модели, основанные на эквивалентной схеме рис. 3, показали, что сопротивление и индуктивность цепи первой (активной) пластины влияют на время нарастания

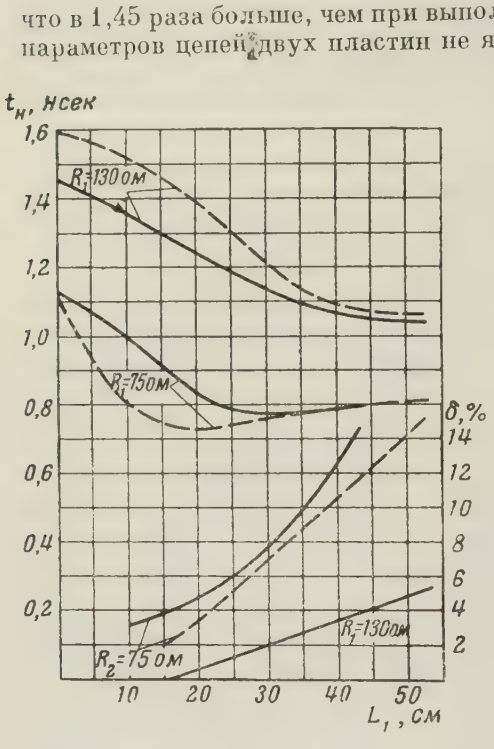


Рис. 7

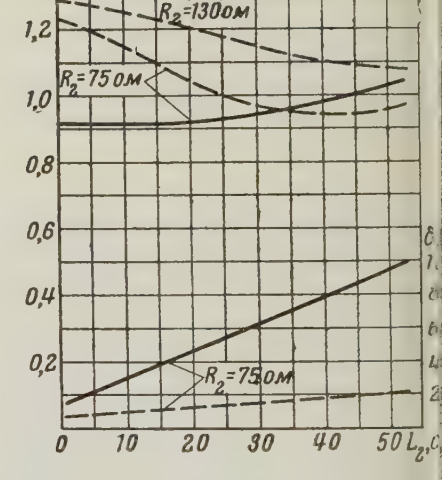


Рис. 8

Рис. 7. График зависимости времени нарастания $t_н$ напряжения и выброса δ от величины индуктивности L_1 при $L_2 = \text{const}$ ($L_2 = 43$ *см*, $R_2 = 130$ *ом*, $C_0 = 1{,}5$ *пф*, $C_1 = C_2 = 2{,}1$ *пф*):

сплошные кривые — $C_в = 0$, $L_а = 0$, $r_а = 0$; пунктирные кривые — $C_в = 0{,}5$ *пф*, $L_а = 45$ *см*, $r_а = 50$ *ом*

Рис. 8. График зависимости времени нарастания $t_н$ напряжения и выброса δ от величины индуктивности L_2 при $L_1 = \text{const}$ ($L_1 = 43$ *см*, $R_1 = 130$ *ом*, $C_0 = 1{,}5$ *пф*, $C_1 = C_2 = 2{,}1$ *пф*):

сплошные кривые — $C_в = 0$, $L_а = 0$, $r_а = 0$; пунктирные кривые — $C_в = 0{,}5$ *пф*, $L_а = 45$ *см*, $r_а = 50$ *ом*

напряжения и выброс в большей мере, чем сопротивление и индуктивность в цепи заземляемой пластины (рис. 7, 8), поэтому целесообразно уменьшать первую индуктивность даже ценой увеличения L_2. При этом уменьшается оптимальная величина сопротивления в цепи первой пластины, что дает существенный выигрыш во времени нарастания напряжения и во многих случаях исключает необходимость в специальном демпфирующем сопротивлении в цепи первой пластины. Демпфирующее сопротивление в цепи второй пластины, как правило, необходимо

Влияние емкости между вводами иллюстрируют осциллограммы рис. 9, олученные на модели при равных индуктивностях и оптимальной вели-ине сопротивлений. Осциллограмма рис. 9,*а* получена при $C_в = 0$; а последующих осциллограммах моделировались величины $C_в = 0{,}5$ 1,5 *пф*. Длительность входного импульса в пересчете на масштаб вре-

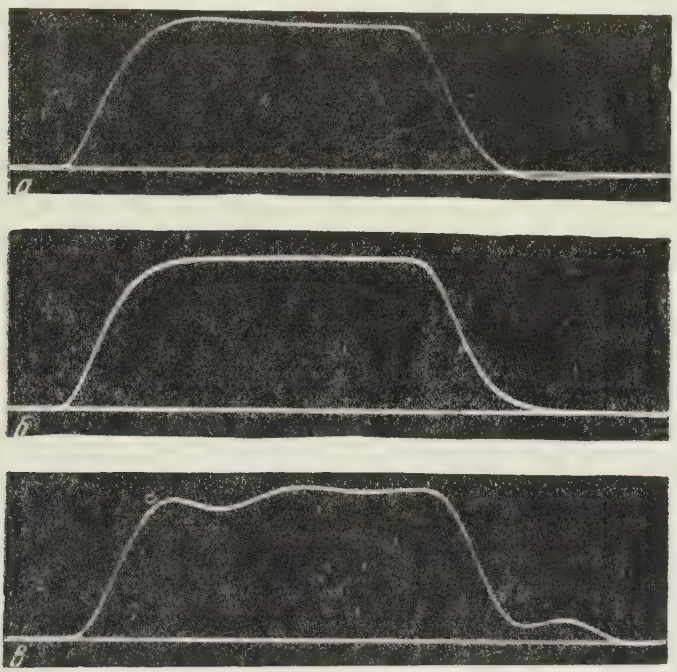
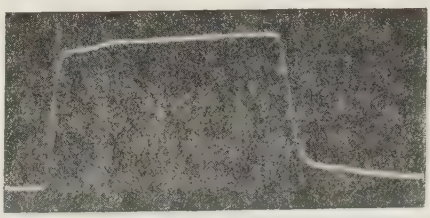


Рис. 9. Осциллограммы, полученные на модели при $L_1 = L_2 = 43$ *мкгн*, $C_0 = 1500$ *пф*, $C_1 = C_2 = 2100$ *пф*, $R_1 = R_2 = 130$ *ом*, входной импульс 5 *мксек*:

а — $C_в = 0$; *б* — $C_в = 500$ *пф*; *в* — $C_в = 1500$ *пф*

ни на трубке — 5 *нсек*. При $C_в = 0{,}5$ *пф* (т. е. при $C_в = 0{,}1\ C_э$) вы-ос уменьшается с 4% до нуля практически без увеличения времени растания напряжения, но дальнейшее увеличение емкости существенно кажает начало плоской вершины импульса: появляется как бы отрица-тельный выброс. Такой же эффект вызывают емкости вводов относительно или.



с. 10. Прямоугольный импульс длитель-стью $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ *сек*, записанный с экрана трубки 13ЛО5А

Изучение влияния отдельных элементов цепи отклоняющих пластин форму сигнала, проведенное методом моделирования на основе предло-нной эквивалентной схемы, позволило так подводить сигнал к трубке ЛО5А (у которой выводы пластин выполнены в противоположные сто-

роны горла), что время нарастания фронта импульса на осциллограм было равно 1,1 *нсек* (см. рис. 10). Этот же импульс, записанный трубк с отклоняющей системой с бегущей волной при полосе в 5000 *Мгц*, им время нарастания напряжения около 0,8 *нсек*.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л ь ю и с, Ф. У э л л с, Миллимикросекундная импульсная техника, И 1956, стр. 205—217.
2. А. И. С о к о л и к, Импульсная техника (учебное пособие), Изд. МИФИ, стр. 202 206.

Поступила в редакцию
15 I 1960
После переработки
27 V 1961

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ КВАДРУПОЛЬНАЯ ЛИНЗА, ПОЛЕ КОТОРОЙ ИМЕЕТ ДВЕ ПЛОСКОСТИ АНТИСИММЕТРИИ И НЕ ИМЕЕТ ПЛОСКОСТЕЙ СИММЕТРИИ

А. М. Страшкевич

Рассмотрены распределение потенциала и электронно-оптические свойства электростатической квадрупольной линзы, не имеющей плоскостей симметрии, но обладающей антисимметрией.

В работе [1] описана магнитная квадрупольная линза, обладающая вумя плоскостями антисимметрии, но не обладающая плоскостями симетрии, и исследованы ее электронно-оптические свойства. Мы рассмотрим лектростатическую квадрупольную линзу, обладающую такого рода нтисимметрией. Для этого азимутальные плоскости симметрии каждой ары электродов должны образовывать между собой не прямой угол, как бычно, а отличный от него угол 2γ (рис. 1). Тогда поле не имеет плоскотей симметрии, однако имеет две взаимно-перпендикулярные плоскости нтисимметрии (на рис. 1 это координатные плоскости xz и yz). Как и при $\gamma = \pi/2$, так и при любом γ, в каждой азимутальной плоскости (т. е. каждой плоскости, проходящей через ось z) потенциал точек, симетричных относительно оси z, одинаков по величине и по знаку.

Обозначая постоянное значение потенциала на оси z (а значит и во сех точках плоскостей антисимметрии xz и yz) через Φ_0, можно предстаить потенциал в любой точке рассматриваемого поля выражением

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_0 + f_{11}(z)\,xy + f_{13}(z)\,xy^3 + f_{31}(z)\,x^3y + \cdots \qquad (1)$$

Перейдем от координат x, y, z к координатам ξ, η, z, причем оси ξ и η овернуты относительно осей x и y на угол $\pi/4$ (ср. рис. 1); координаты вязаны между собой соотношениями

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi + \eta), \qquad (2)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y). \qquad (2a)$$

Тогда (1) превратится в выражение

$$\Phi(\xi, \eta, z) = \Phi_0 + \frac{1}{2} f_{11}(z)(\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{4}[f_{13}(z) + f_{31}(z)](\xi^4 - \eta^4) + \\ + \frac{1}{2}[f_{13}(z) - f_{31}(z)](\xi^3\eta - \xi\eta^3) + \cdots \qquad (3)$$

Из этого выражения видно, что вблизи оси z (где можно пренебречь тепенями ξ и η выше второй) плоскости ξz и ηz являются плоскостями имметрии (так как координаты входят только в четных степенях), но а значительных расстояниях от оси (т. е. когда нельзя пренебречь члеами четвертого порядка) этой симметрии нет, если только коэффициенты f_{13} и $_{31}$ не тождественны между собой; последнее имеем при $\gamma = \pi/4$, и тогда оле во всем пространстве является симметричным относительно плоскотей ξz и ηz. Таким образом, если из-за случайных причин (например, иза неточности монтажа) угол γ отклоняется от значения $\pi/4$, электронно-

оптические свойства центральной области поля системы качественно н изменяются, так как в этой области ни двоякая антисимметрия, ни двоя кая симметрия поля не нарушаются. Количественные изменения электрон но-оптических параметров, которые при этом имеют место, рассмотрены ниже.

Проиллюстрируем изложенные общие положения на конкретном при мере системы четырех сферических электродов малого радиуса (рис. 1).

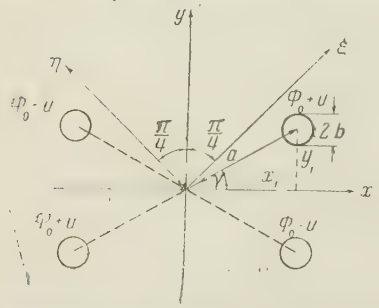


Рис. 1. Пример квадрупольной линзы, поле кото рой имеет две плоскости антисимметрии (xz, yz не имеет плоскостей симметрии

Если считать сферы точечно-малыми и обозначить их заряды $\pm q$, то по тенциал в точке с координатами x, y, z равен

$$\Phi = \Phi_0 + q\{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} + [(x + x_1)^2 + (y + y_1)^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} - [(x - x_1)^2 + (y+y_1)^2+z^2]^{-\frac{1}{2}} - [(x + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}}\}. \quad (4$$

Разлагая (4) в ряд Маклорена и сравнивая с (1), получаем

$$f_{11}(z) = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)_{00} = 12qx_1y_1(x_1^2 + y_1^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = 6qa^2\sin 2\gamma\,(a^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (5$$

$$f_{13}(z) = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}\right)_{00} = 5qa^2\sin 2\gamma\,(a^2 + z^2)^{-\frac{9}{2}}[a^2(7\sin^2\gamma - 3) - 3z^2] \quad (5а)$$

$$f_{31}(z) = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y}\right)_{00} = 5qa^2\sin 2\gamma\,(a^2 + z^2)^{-\frac{9}{2}}[a^2(7\cos^2\gamma - 3) - 3z^2]. \quad (5б)$$

Сравнивая (5а) и (5б), получим, что при $\gamma = \pi/4$ эти выражения сов падают; следовательно, тогда в формуле (3) исчезают члены с нечетным степенями ξ и η, т. е. поле будет обладать симметрией по отношению к пло скостям ξz и ηz не только в приосевой (центральной) области. Выраже ние (5) совпадает при $\gamma = \pi/4$ с приведенным в [2]; при этом заменяем выражением bU, т. е. считаем, что на поверхности сферы малого радиуса потенциал обусловлен только точечным зарядом, находящимся в центр ее, так что эта поверхность эквипотенциальна и может быть заменена по верхностью металлического электрода, потенциал которого равен $q/$ (ср. [2—4]).

Уравнения траектории релятивистской заряженной частицы [3] (фор мулы (1,2а)) для центральной области можно записать в следующем виде

$$x'' = k(z)\,y, \quad y'' = k(z)\,x; \quad (6$$

трихи обозначают дифференцирование по z, а переменный коэффициент (z) имеет значение

$$k(z) = \frac{1 - \frac{e\Phi_0}{m_0c^2}}{1 - \frac{e\Phi_0}{2m_0c^2}} \frac{f_{11}(z)}{2\Phi_0} = A\frac{f_{11}(z)}{2\Phi_0}, \qquad (6a)$$

де e — алгебраическое значение заряда; m_0 — масса покоя частицы; — скорость света в вакууме. Для интегрирования уравнений (6) можно рименить метод последовательных приближений, аналогичный использованному в [3] § 15) для расчета траекторий в олях с четырьмя плоскостями имметрии и четырьмя плоскостями антисимметрии. Обозначим $x' = X, y' = Y$; пусть x_0 y_0 будут значениями x и y ри $z = z_0$. Тогда

$$x(z) = x_0 + \int_{z_0}^{z} X(z)\,dz,$$

$$y(z) = y_0 + \int_{z_0}^{z} Y(z)\,dz. \qquad (7)$$

Но вследствие (6)

$$X(z) = x_0' + \int_{z_0}^{z} k(z)\,y\,dz,$$

$$Y(z) = y_0' + \int_{z_0}^{z} k(z)\,x\,dz. \qquad (8)$$

Взяв к качестве первого приближения

$$x_1 = x_0 + x_0'(z - z_0),$$
$$y_1 = y_0 + y_0'(z - z_0)$$
$$(\text{т. е. } X_1 = x_0',\ Y_1 = y_0')$$

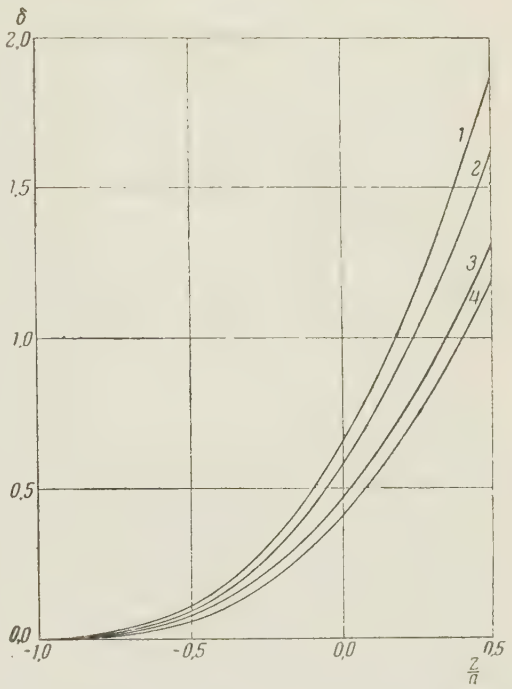


Рис. 2. Проекции на плоскость симметрии центральной части поля приосевых траекторий, первоначально параллельных оси z, при различных значениях γ:

1 — $\gamma = \pi/4$; *2* — $\gamma = \pi/6$; *3* — $\gamma = \pi/8$; *4* — $\gamma = \pi/9$

и подставив в (8), находим X_2 и Y_2, которые подставляем в (7), чтобы определить координаты x_2, y_2 точек траектории во втором приближении. Продолжая этот процесс, находим третье, четвертое и т. д. приближения. Для рассмотренной выше конкретной системы (отсчитывая z от центра квадрупольной линзы и взяв $z_0 = -l$) второе приближение имеет вид

$$x_2 = x_0 + x_0'(z + l) + A\frac{U}{\Phi_0} b \sin 2\gamma\left(Z_1\frac{y_0}{a} + Z_2 y_0'\right), \qquad (9)$$

$$y_2 = y_0 + y_0'(z + l) + A\frac{U}{\Phi_0} b \sin 2\gamma\left(Z_1\frac{x_0}{a} + Z_2 x_0'\right), \qquad (9a)$$

где

$$z_1 = \frac{1 + 2\frac{z^2}{a^2}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}}} - \frac{1 - 3\frac{l}{a}\frac{z}{a}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{l^2}{a^2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{l^2}{a^2}\right)}};$$

$$Z_2 = \frac{\frac{l}{a}\left(1 + 2\frac{z^2}{a^2}\right) - \frac{z}{a}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}}} + \frac{\frac{z}{a}\left(1 + 2\frac{l^2}{a^2}\right) - \frac{l}{a}}{\sqrt{1 + \frac{l^2}{a^2}}}.$$

Если пользоваться координатами ξ, η, то переменные в уравнениях приосевой траектории разделяются:

$$\xi_2 = \xi_0 + \xi_0'(z+l) + A\frac{U}{\Phi_0} b \sin 2\gamma\left(Z_1\frac{\xi_0}{a} + Z_2\xi_0'\right), \qquad (9б)$$

$$\eta_2 = \eta_0 + \eta_0'(z+l) - A\frac{U}{\Phi_0} b \sin 2\gamma\left(Z_1\frac{\eta_0}{a} + Z_2\eta_0'\right). \qquad (9в)$$

На рис. 2 представлена зависимость от z величины δ, которая обозначает выражение $\frac{\xi_2-\xi_0}{\xi_0} : A\frac{U}{\Phi_0}\frac{b}{a}$ $\left(\text{или } \frac{\eta_0-\eta_2}{\eta_0} : A\frac{U}{\Phi_0}\frac{b}{a}\right)$; полученные кривые изображают проекции приосевых траекторий на плоскости симметрии при $\xi_0' = \eta_0' = 0$ и $l = a$ для различных значений γ.

Как известно, электронно-оптические параметры обычной квадрупольной линзы, поле которой имеет две плоскости симметрии и две плоскости антисимметрии, в гауссовском приближении (т. е. для приосевых лучей) могут быть выражены через коэффициент, стоящий в (3) при разности $\xi^2 - \eta^2$. В работах [3, 4] этот переменный коэффициент обозначен C_z; для системы четырех малых сфер он равен $3a^2bU\,(a^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$, что получаем и из формул данной работы, взяв $\gamma = \pi/4$, так как из (3) и (5) следует

$$C_z = \frac{1}{2} f_{11}(z) = 3a^2bU \sin 2\gamma\,(a^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}. \qquad (10)$$

Из этого выражения и [3] (формулы (15.47), (15.48)) видим, что при любом значении γ координаты главных точек оказываются неизменными, а абсолютная величина оптических сил меняется пропорционально $\sin 2\gamma$.

Выводы. Центральная область двоякоантисимметричного поля имеет две плоскости симметрии, даже если в более широкой области плоскостей симметрии поля не существует.

Уравнения траектории релятивистской заряженной частицы в приосевой области можно представить в виде (6); их удобно решать методом последовательных приближений.

Для конкретной системы четырех малых заряженных сфер найдены необходимые для расчета электронно-оптических свойств коэффициенты и получены траектории во втором приближении.

При произвольном изменении угла 2γ между азимутальными плоскостями симметрии системы сферических электродов координаты главных точек неизменны, а оптические силы меняются пропорционально $\sin 2\gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Маркович, И. И. Цуккерман, ЖТФ, 1960, **30**, 11, 1362.
2. G. D. Archard, Proc. Phys. Soc. B, 1955, 68, 11, 817.
3. А. М. Страшкевич, Электронная оптика электростатических полей, не обладающих осевой симметрией, ГИФМЛ. 1959.
4. А. М. Страшкевич, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 12, 1997.

Поступила в редакцию
28 I 1961

961 № 10

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ХОЛОДНОГО ОКСИДНО-МАГНИЕВОГО КАТОДА С САМОПОДДЕРЖИВАЮЩЕЙСЯ ЭМИССИЕЙ

Н. Я. Басалаева, Т. М. Екименко, М. И. Елинсон, Д. В. Зернов, Я. С. Савицкая, А. А. Яснопольская

Разработана технология получения слоев окиси магния и изучено влияние различных факторов на самоподдерживающуюся эмиссию катода. Определено влияние толщины покрытия на эмиссионные свойства катода. Показано, что наилучшая эмиссионная способность достигается при оптимальном количестве поглощенного кислорода. Определено, что времена формирования эмиссии после включения анодного напряжения превышают 0,05 *сек*. Исследована температурная зависимость эмиссии. Произведено микроскопическое исследование распределения эмиссии по поверхности катода. Установлено влияние на эмиссию магнитного поля, накладываемого перпендикулярно поверхности слоя окиси магния. Обсужден механизм самоподдерживающейся эмиссии.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появился ряд сообщений [1—5] о создании и успешном использовании в электронных лампах нового типа катода, механизм эмиссии которого связан с процессами, происходящими в диэлектрических слоях при наличии в них сильного электрического поля. Основное преимущество этого катода по сравнению с термоэлектронными катодами состоит в том, что он работает в холодном состоянии, не требуя затраты энергии на разогрев, и обладает относительно малым временем установления эмиссии после включения. Эмиссия возникает в результате кратковременного освещения катода или кратковременной бомбардировки его поверхности быстрыми первичными электронами от вспомогательного источника (стартера) за время порядка десятых долей секунды, после чего устанавливается режим самоподдержания эмиссии (эмиссия не прекращается после прекращения облучения светом или электронами).

Следует отметить, что явление самоподдерживающейся эмиссии с тонких диэлектрических пленок было известно сравнительно давно. Так, одним из авторов настоящей статьи (Д. В. Зерновым) еще в 1937 г. было обнаружено [6], что при обстреле первичными электронами тонких прозрачных пленок B_2O_3, нанесенных на металлическую (никелевую) основу, возникает вторичный ток, в сотни раз превосходящий первичный. Этот ток сохранялся неопределенно долго после выключения первичного пучка электронов, не обнаруживая, в отличие от наблюдавшейся ранее Молтером затухающей со временем эмиссии пленок Al_2O_3, никакой тенденции к спаданию. Позже явление самоподдерживающейся эмиссии наблюдалось на других диэлектрических слоях, в том числе на MgO [7, 8], однако долгое время этот эффект вследствие недостаточной стабильности и воспроизводимости не находил практического применения. Лишь в последние годы в результате поисков оптимальной технологии изготовления катодов с самоподдерживающейся эмиссией были найдены условия, обеспечивающие возможность получения катодов в виде пористого слоя окиси магния на металлическом (никелевом) керне, качество которых

(срок службы, воспроизводимость, стабильность, равномерность распределения эмиссии по поверхности) оказалось достаточно высоким для того, чтобы практическое использование нового катода в электронных приборах стало на реальную основу.

В литературе описан как опыт применения холодного оксидно-магниевого катода в электронных лампах, так и методика его изготовления, структура и основные свойства. Приведены вольтамперные характеристики эмиссии, данные о среднем потенциале поверхности катода, о распределении эмиттированных электронов по энергиям и т. д.

Целью настоящей работы являлось изучение некоторых свойств холодного оксидно-магниевого катода, не получивших достаточного отражения в опубликованных к настоящему времени работах.

К числу подлежащих разрешению вопросов относились: 1) выяснение роли обработки слоя MgO в атмосфере кислорода; 2) исследование температурной зависимости эмиссии; 3) изучение процесса формирования эмиссии при включении анодного напряжения; 4) выяснение влияния на эмиссию магнитного поля; 5) выяснение взаимосвязи между эмиссионной способностью и толщиной оксидно-магниевого слоя; 6) изучение характера распределения эмиссии по поверхности катода; 7) выяснение возможности возбуждения самоподдерживающейся эмиссии непосредственным наложением напряжения на слой MgO; 8) выяснение влияния на эмиссию величины отсасывающего поля.

На основе результатов исследований ниже высказаны некоторые соображения о механизме самоподдерживающейся эмиссии и о перспективах ее практического применения.

1. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Катоды изготовлялись двумя методами: катафорезом и опрыскиванием.

Изучение устойчивости и рассеивающей способности суспензий карбоната магния различного состава, определение связи их состава с качеством покрытий, получаемых при различных режимах, позволило рекомендовать для нанесения покрытий методом катафореза 5%-ю суспензию нормального карбоната магния на абсолютированном метаноле и на смеси метанола с ацетоном в соотношениях 1 : 1 и 3 : 1.

Для опрыскивания применялась амилацетатная суспензия смеси основного карбоната магния и перекиси магния.

В качестве керна были использованы электролитический никель, никель с присадками (магния и др.), платинированный никель и платина.

Приводимые ниже результаты в основном относятся к катодам с керном из никеля марки НМ (с присадкой магния) и платинированного никеля. Толщины слоев варьировались в широких пределах: от 12 до 60 *мк* для опрыснутых и от 6 до 35 *мк* для катафорезных покрытий. Усадка слоев после прокаливания в вакууме составляла 20—30%. Слои, получавшиеся как опрыскиванием, так и катафорезом, отличались сравнительно высокой пористостью. Согласно приближенной оценке, произведенной по соотношению плотности полученных слоев и плотности соответствующих монокристаллов, суммарный объем пустот в слое (до его вакуумной обработки) составлял около 80% общего объема слоя. Несмотря на усадку слоев после термической обработки, процент пустот при этом не уменьшался, а даже несколько увеличивался. Шероховатость слоев составляла около 3 *мк* для катафорезных и около 10 *мк* для опрыснутых катодов. Наивероятнейший размер зерен до термической обработки катода оценивался примерно в 1 *мк*. Структуры опрыснутых и катафорезных катодов несколько отличаются друг от друга (рис. 1 и 2).

Экспериментальные приборы большей частью выполнялись в виде простого диода с трубчатым катодом овального сечения и сетчатым анодом

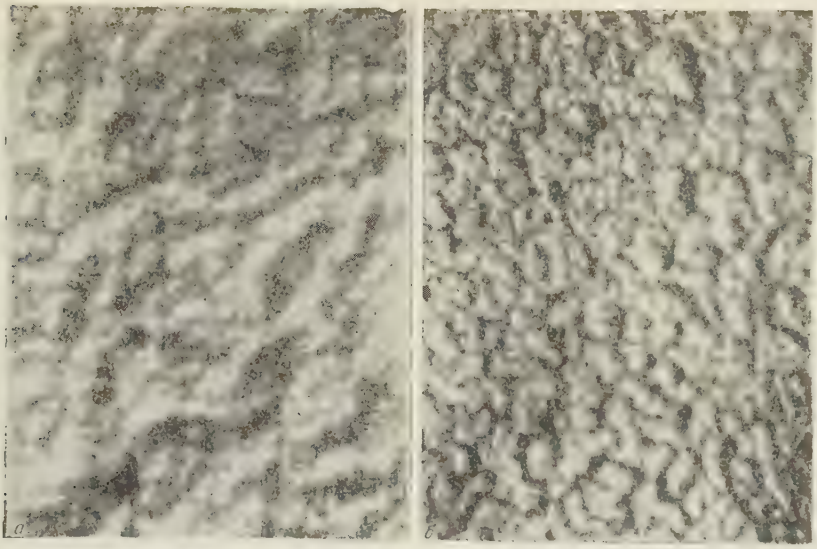


Рис. 1. Микрофотографии поверхности опрыснутого катода:
а — до прогрева в вакууме; *б* — после прогрева в вакууме (увеличение 115 раз)

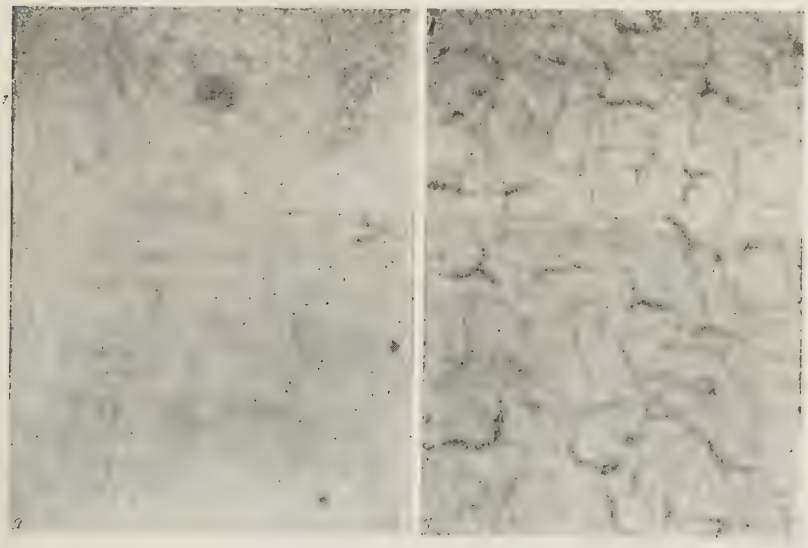


Рис. 2. Микрофотографии поверхности катафорезного катода:
а — до прогрева в вакууме; *б* — после прогрева в вакууме (увеличение 115 раз)

Для запуска эмиссии в этих диодах использовался стартер в виде тонкой накаливаемой током вольфрамовой проволоки ($\varnothing = 100$ *мк*). Некоторые эксперименты проводились в приборах, в которых запуск эмиссии осуществлялся бомбардировкой электронами из специального электронного прожектора.

Обработка катодов состояла в прогреве слоя при 850° С в вакууме в течение 10 *мин*. При этом происходило разложение карбоната магния с образованием слоя окиси магния. Затем следовала обязательная операция — прогрев в атмосфере кислорода.

Эксперименты были выполнены на большом числе образцов катодов (около 400). Полученные данные по плотности тока (до 50 *ма*/*см*^{2} кратковременно и около 5 *ма*/*см*^{2} стационарно при общем токе 10—100 *ма*),

степени однородности распределения эмиссии по поверхности катода и по стабильности эмиссии во времени свидетельствуют о том, что мы имели дело с образцами катодов, соответствующими по параметрам, известным из литературы.

В качестве примера на рис. 3 показаны вольтамперные характеристики эмиссии, снятые для разных катодов.

а. Влияние кислорода. Опыт показывает, что слои, не обработанные в кислороде, как правило, не обнаруживают формирования эмиссии, либо эмиссия хотя и возникает, но лишь в отдельных немногочисленных центрах и притом оказывается весьма нестабильной. Вместе с тем непонятно, каков смысл этой операции: состоит ли он в необходимости окисления имеющихся в слое примесей с целью придания ему большей диэлектрической прочности (что маловероятно), или в окислении расположенного под слоем MgO никеля, или же введение в слой кислорода, по каким-то причинам, важно само по себе.

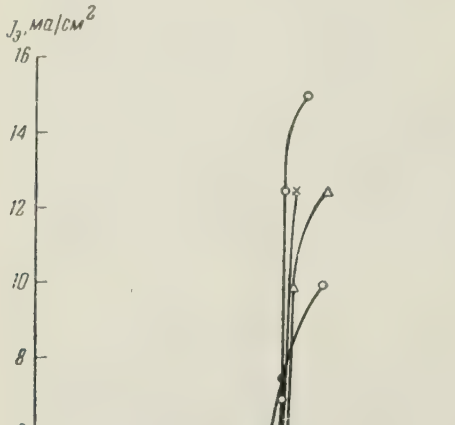


Рис. 3. Вольтамперные характеристики различных катодов

Для выяснения этих вопросов были поставлены следующие эксперименты.

После вакуумной термообработки катоды подвергались нескольким циклам обработки в кислороде, причем каждый цикл состоял в прогреве катода в атмосфере кислорода при начальном давлении 0,1 *мм* рт. ст. (при 850° С), продолжавшемся до тех пор, пока давление кислорода в установке не снижалось до 10^{-3} *мм* рт. ст., что занимало примерно 3 *мин* (как показали контрольные опыты, основная масса кислорода поглощается при этом не слоем MgO, а керном и различными частями арматуры прибора). После каждого цикла обработки в кислороде измерялись максимальный ток эмиссии катода $I_э$, превышение которого приводило к нестабильности эмиссии, и соответствующее этому току падение напряжения U_a между катодом и анодом диода. Отношение $I_э/U_a$ принималось за некий критерий, характеризующий качество катода. Выбор этого критерия естественно носит несколько произвольный характер (поскольку связь между $I_э$ и U_a в данном случае носит нелинейный характер и, следовательно, отношение $I_э/U_a$ не является в полном смысле слова аналогом проводимости при токе насыщения катода), однако за неимением лучшего он дает правильное представление о качестве катода, которое, очевидно, будет тем выше, чем больший эмиссионный ток может дать катод и чем меньше анодное напряжение, при котором этот ток может быть получен.

Полученные результаты иллюстрируются графиками зависимости отношения $I_э/U_a$ от N — числа циклов обработки, приведенными на рис. 4 (для катафорезного покрытия) и рис. 5 (для опрыснутого покрытия). Характер кривых на обоих графиках в общем одинаков. Независимо от толщины и метода нанесения слоя наблюдается относительно быстрый

рост отношения $I_э/U_a$ с увеличением количества поглощенного кислорода; при некоторой степени насыщения кислородом кривые проходят через максимум, за которым следует довольно быстрый спад. Это прежде всего свидетельствует не только о существенном значении операции обработки катода кислородом, но и о большой чувствительности катода к этой операции. Кривые, приведенные на рис. 4, обнаруживают закономерный характер изменения положения и величины максимума с увеличением толщины пленки. На рис. 5 эта закономерность видна менее отчетливо.

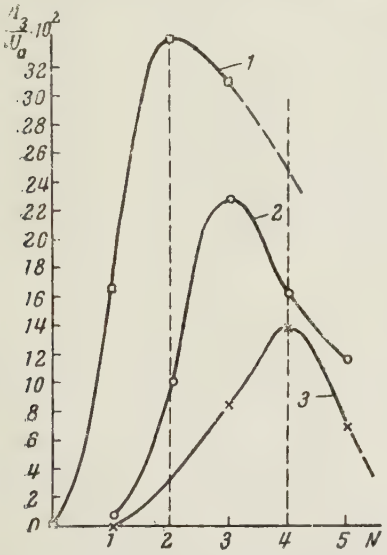


Рис. 4. Зависимость отношения $I_э/U_a$ от числа циклов обработки кислородом катафорезного катода при различных толщинах покрытия:

1 — l = 6 мк; 2 — l = 20 мк; 3 — l = 35 мк

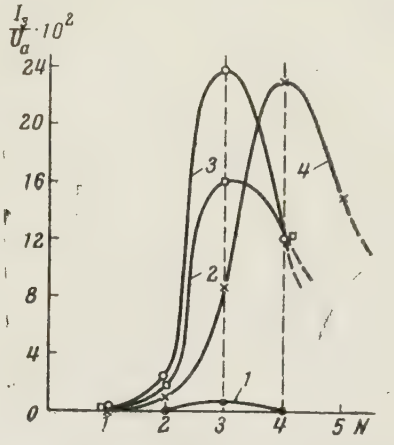


Рис. 5. Зависимость отношений $I_э/U_a$ от числа циклов обработки кислородом опрыснутого катода при различных толщинах покрытия:

1 — l = 12 мк; 2 — l = 20 мк; 3 — l = =40 мк; 4 — l = 60 мк

Чтобы исключить сделанное выше предположение о том, что роль обработки кислородом сводится к образованию промежуточного слоя NiO, были испытаны катоды с керном из платинированного никеля (толщина слоя платины ~50 *мк*). Однако для этого катода характер зависимости отношения $I_э/U_a$ от числа циклов обработки остался прежним (см. рис. 6). О том, что роль кислорода не может быть сведена к окислению Ni или каких-либо примесей в самом слое, свидетельствуют также результаты эксперимента, состоявшего в чередовании циклов прогрева в вакууме и кислороде, иллюстрируемого графиком, приведенным на рис. 7.

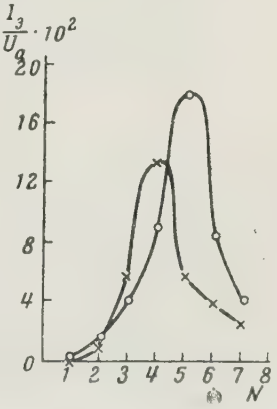


Рис. 6. Зависимость отношения $I_э/U_a$ от числа циклов обработки кислородом для двух катодов с керном из платинированного никеля

Как показывает этот рисунок, катод, обработанный в кислороде, полностью теряет эмиссионные свойства при последующем прогреве в вакууме, причем процесс активации и дезактивации может повторяться произволь-

ное число раз. Поскольку кратковременный прогрев в вакууме при 850° С не может привести к разложению NiO, равно как и большинства других окислов, предположение о том, что роль обработки в кислороде сводится к окислению никелевой подложки или каких-либо примесей в слое можно считать несостоятельным. Вместе с тем, при повторных обработках катода в кислороде толщина слоя NiO, образующегося между керном и слоем MgO, по всей вероятности, должна возрастать. Тот факт, что после каждого отжига в вакууме катод удается довести до прежней степени активности прогревом в кислороде, свидетельствует о том, что наличие или отсутствие прослойки из NiO, равно как и толщина слоя NiO, не сказывается на эмиссионных свойствах катода.

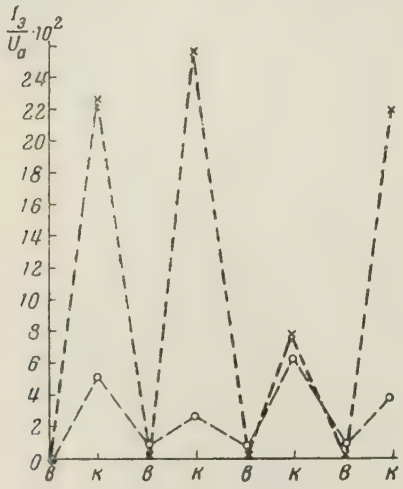


Рис. 7. Изменение отношения $I_э/U_a$ при чередовании циклов прогрева катода в вакууме (*в*) и в кислороде (*к*)

Учитывая, что при используемых временах и температурах прогрева в кислороде (850° С в течение 3 *мин*) вряд ли можно ожидать заметной дуффузии кислорода внутрь зерен MgO (известно, например, что диффузия кислорода в монокристаллах MgO наблюдается лишь при прогревах до температур более 1500° С в течение многих часов), представляется наиболее правдоподобным, что обработка катода в кислороде приводит к диффузии кислорода по порам и адсорбции его на поверхностях зерен MgO. Вакуумный прогрев, напротив, приводит к десорбции кислорода и удалению его из слоя MgO. Таким образом, состояние активности оксидно-магниевого катода должно определяться наличием на поверхностях зерен MgO пленки адсорбированного кислорода.

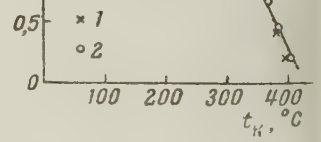


Рис. 8. Температурная зависимость эмиссии в области обратимых изменений тока эмиссии (U_a = const):

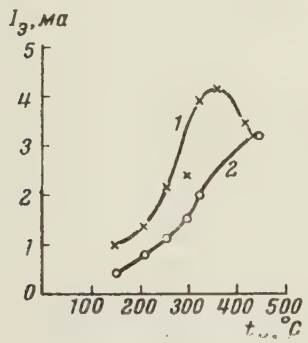
1 — повышение $t_к$; *2* — понижение $t_к$

б. Температурная зависимость эмиссии. Установление характера температурной зависимости эмиссии оксидно-магниевого катода интересно как с точки зрения выяснения механизма эмиссии, так и с точки зрения выяснения температурной устойчивости этого катода. Исследование температурного хода эмиссии оксидно-магниевого катода показало, что можно наблюдать как обратимые, так и необратимые изменения тока эмиссии с температурой. На рис. 8 показан температурный ход тока эмиссии в интервале температур от 100 до 400° С. Кривая обнаруживает наличие довольно резко выраженного максимума, однако изменения эмиссии с температурой здесь вполне обратимы.

Нагрев катода до более высоких температур приводит к необратимым изменениям эмиссии, по-видимому, в результате поверхностной миграции и десорбции кислорода (см. рис. 9).

Падением эмиссии с ростом температуры можно объяснить тенденцию к насыщению, наблюдаемую на вольтамперных характеристиках в области больших плотностей тока.

Непосредственный эксперимент показал, что температура слоя MgO (измерявшаяся хромель-алюмелевой термопарой) с ростом плотности



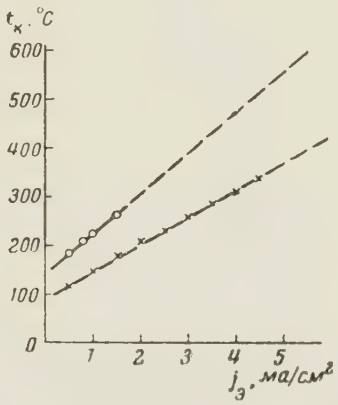


Рис. 9. Температурная зависимость эмиссии (случай необратимого изменения тока эмиссии, $U_a = \text{const}$):

1 — повышение $t_к$; *2* — понижение $t_к$

Рис. 10. Зависимость температуры слоя MgO от плотности тока эмиссии (для двух разных катодов)

бираемого тока существенным образом повышается, достигая при плотностях тока порядка нескольких миллиампер на квадратный сантиметр значений, соответствующих падающей ветви кривой зависимости тока миссии от температуры (см. рис. 10). Таким образом, предел увеличению отности тока эмиссии ставит разогрев слоя MgO. Поэтому предельные отности тока с оксидно-магниевого катода можно повысить за счет о искусственного охлаждения.

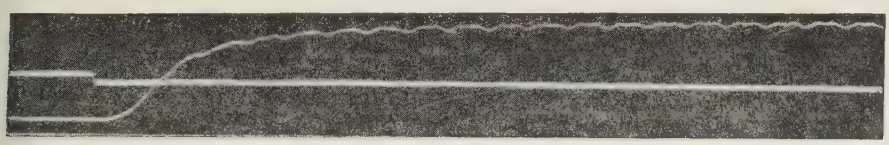


Рис. 11. Осциллограмма формирования тока эмиссии при включении анодного напряжения

в. Формирование эмиссии. Для выяснения вопроса том, как протекает во времени процесс формирования эмиссии оксидно-магниевого катода, изменения тока эмиссии после включения анодного пряжения при заранее включенном накале стартерного электрода наюдались на экране осциллографа. Типичная осциллограмма тока эмисии приведена на рис. 11. Одновременно с током эмиссии осциллографировалось анодное напряжение, моменту включения которого соответствует упенька на осциллограмме.

Осциллографирование показало, что длительность процесса формироания меняется в довольно широких пределах в зависимости от величины иложенного анодного напряжения (определяющего величину устанавли-

вающегося стационарного эмиссионного тока), и, в особенности, от величин тока накала стартерного электрода. На рис. 12 показана полученна из осциллограмм зависимость времени формирования (т. е. времени, про текшего с момента включения анодного напряжения до установлени стационарного тока) от величины плотности устанавливающегося к конц процесса формирования эмиссионного тока (регулируемого анодным на пряжением). Как показывает приведенная на рис. 12 кривая, время фор мирования с увеличением плотности тока от 1 до 7,5 *ма/см*^{2} уменьшается с 0,5 до ~0,05 *сек*.

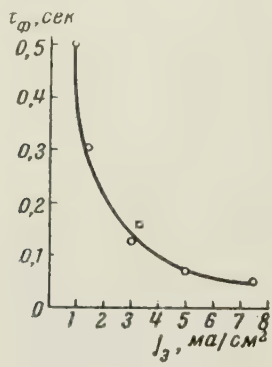


Рис. 12

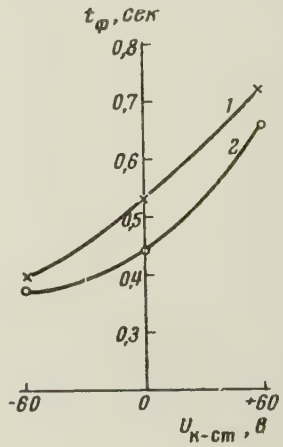


Рис. 13

Рис. 12. Зависимость времени формирования эмиссии от плотности стационарного эмиссионного тока

Рис. 13. Зависимость времени формирования эмиссии от потенциала катода относительно стартерного электрода для двух значений тока эмиссии:

1 — $I_э = 3$ *ма*; *2* — $I = 10$ *ма*

Представляло интерес выяснить, какой фактор в большей степен содействует формированию эмиссии: электронная эмиссия стартерног электрода или воздействие излучаемым им светом. С этой целью измеря лось время формирования при подаче на стартерный электрод отрицатель ного (—60 *в*), нулевого и положительного (+60 *в*) потенциалов относитель но катода (в последнем случае, очевидно, электронный ток со стартерног электрода на катод должен полностью отсутствовать). Результаты эти измерений, иллюстрируемые кривыми рис. 13 (снятыми для двух значени установившегося тока эмиссии), свидетельствуют о том, что при заперто токе эмиссии со стартера на катод формирование эмиссии происходи быстрее. Отсюда следует прежде всего, что для формирования эмисси достаточно одного освещения катода, облучение же его электронам в данных условиях только затрудняет процесс формирования (в условия опыта при подаче отрицательного напряжения на стартерный электро испускаемые им электроны бомбардировали катод до подачи отсасыва щего напряжения на анод, что, по-видимому, особенно затрудняло фо мирование эмиссии после включения анодного напряжения).

Уменьшение накала стартерного электрода весьма существенно ув личивает время формирования. Так, снижение тока накала стартер с 1,5 до 0,9 *а* привело к увеличению времени формирования эмиссии пр прочих равных условиях с 0,4 до 1,7 *сек*.

Выключение анодного напряжения приводит к практически мгнове ному прекращению тока эмиссии.

г. Влияние магнитного поля. Поскольку слои Mg обладают высокой пористостью, существенным для эмиссии может ок заться характер движения электронов в порах, который должен изменят

я при воздействии на слой магнитного поля. Для выяснения степени лияния магнитного поля на эмиссию были произведены измерения миссионного тока при постоянном анодном напряжении в зависимости т величины напряженности магнитного поля, перпендикулярного к поерхности катода.

Результаты измерений, иллюстрируемые кривыми рис. 14, свидетельтвуют о том, что магнитное поле действительно существенно влияет на миссию, причем увеличение напряженности магнитного поля вызывает начала рост, а затем уменьшение эмисионного тока.

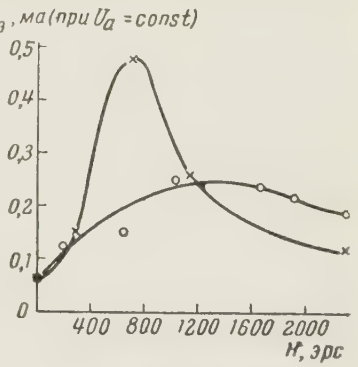


Рис. 14. Зависимость эмиссионного тока от напряженности магнитного поля (для двух катодов)

д. Влияние толщины покрытия. Как уже отмечалось, толщина окрытий в исследованных катодах менялась в довольно широких пределах (от 6 о 35 *мк* в катафорезных и от 12 до 60 *мк* опрыснутых). Для катафорезных катодов, ак правило, с уменьшением толщины покрытия качество катодов улучшалось: величивалось оптимальное значение отношения $I_э/U_a$ (в основном за счет уменьения напряжения U_a) (см. рис. 4); миссия более равномерно распределялась о поверхности катода; вакуумный отжиг онких покрытий не приводил к образованию трещин в слое, тогда как толстые кои всегда растрескивались (см. рис. 1, *б*).

Увеличение толщины слоя опрыснутых катодов примерно до 30—40 *мк* лучшает их эмиссионные свойства; дальнейшее увеличение толщины слоя о 60 *мк*) на эмиссионных свойствах катода существенным образом не азывается (см. на рис. 5). Существует некоторая минимальная толщина 12 *мк*, при которой, как правило, уже не удается возбудить самоподдерливающуюся эмиссию.

е. Микроскопические наблюдения эмиттирующей поверхности. Самоподдерживающаяся эмиссия оксидно-магниевого катода всегда сопровождается люминесценцией эмиттирующей части поверхности. При наблюдении хорошо активированного (в кислороде) катода невооруженным глазом распределение люминесценции по поверхности катода представляется вполне равномерным. Однако микроскопические наблюдения показывают, что в случае толстых катафорезных покрытий, растрескивающихся при вакуумном отжиге, люминесценция сосредоточивается в основном в районе трещин в виде отдельных ярких центров. Для тонких катафорезных покрытий распределение люминесценции по поверхности катода оказывается действительно однородным. Нагрев катода приводит к появлению флуктуаций свечения (с образованием в некоторых случаях флуктуирующих темных пятен), что, по-видимому, связано с миграцией и удалением из слоя кислорода.

Интересно отметить, что при съеме небольших токов иногда наблюдается свечение лишь части поверхности катода, площадь которой увеличивается с ростом отбираемого тока. Это явление напоминает известную картину увеличения площади катодного свечения с ростом тока, наблюдаемую в нормальном тлеющем разряде.

ж. О возбуждении самоподдерживающейся эмиссии непосредственным приложением напряжения и о роли отсасывающего электрического поля. Если роль стартера в развитии самоподдерживающейся эмиссии сводится к положительной зарядке поверхности слоя MgO и к созданию полем электрического поля, то естественно ожидать, что самоподдерживающаяся эмиссия может быть вызвана непосредственным наложением

напряжения на слой MgO. Для проверки такой возможности был изг товлен нормально обработанный оксидно-магниевый катод, к поверхност которого прижимались пружинящая сетка (⌀ проволоки 50 *мк*, ша 0,37 *мм*). На сетку подавалось положительное напряжение относитель керна катода. Однако возбудить эмиссию таким образом не удалос несмотря на то, что напряжение на сетке поднималось до 800 *в*. Вмест с тем, при включении стартерного электрода эмиссия легко возбуждалас

Таким образом можно считать установленным, что для начала разви тия самоподдерживающейся эмиссии необходимо ввести в слой некоторо хотя бы и очень малое, количество свободных электронов. Интересн отметить, что при создании в слое MgO поля непосредственным наложение напряжения без участия стартера слой начинал пробиваться при напря жении около 750 *в*, в то время как при включенном стартере пробои на блюдались уже при 300 *в*. Это, очевидно, свидетельствует о неравномер ности распределения потенциала в слое MgO в условиях существовани самоподдерживающейся эмиссии.

Для выяснения роли отсасывающего поля были изготовлены диоды сетчатый анод которых состоял из двух частей: одна половина предста ляла собой густую сетку, вторая — редкую *. Опыт показал, что эмисси легче формировалась в части катода, которая расположена под густо сеткой.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вся совокупность результатов исследований самоподдерживающейс эмиссии диэлектрических слоев с полной очевидностью свидетельству о том, что этот эффект является следствием наличия в слое сильного эле трического поля. Дискуссионным остается вопрос о том, к каким элемен тарным процессам, ответственным за развитие самоподдерживающейс эмиссии, приводит это поле.

Мы считаем целесообразным рассмотреть отдельно явления в мон кристаллах (и вообще в сплошных телах) и явления в пористых система

Физикой полупроводников и диэлектриков установлена следующа последовательность главных физических явлений в сплошных средах мере увеличения напряженности электрического поля E. Увеличение приводит прежде всего к ионизации примесей за счет зинеровского ил френкелевского механизма или, вследствие увеличения числа быстры электронов, за счет механизма ударной ионизации. Дальнейший рост приводит к увеличению перегрева электронного газа (т. е. к увеличени его эффективной температуры), однако функция распределения электрон остается практически симметричной. При некотором значении эффекти ной температуры электронов начинается заметная изотропная ударна ионизация атомов решетки, приводящая к переходам электронов из з полненной полосы в зону проводимости. При еще более сильных поля при которых несимметричная часть функции распределения f_1 стан вится соизмеримой с симметричной ее частью f_0, развивается лавинна ударная ионизация. При больших E (порядка 10^7 *в/см*) возможна так туннельная эмиссия электронов из металлической подложки в слой д электрика.

Возникает вопрос, возможно ли развитие самоподдерживающейс электронной эмиссии в системах, состоящих из сплошного диэлектрич ского слоя, нанесенного на металлическую подложку. По-видимом такая возможность не может быть отвергнута, однако механизм ее не м жет быть связан с развитием лавинной ударной ионизации по всей то щине диэлектрического слоя (составляющей обычно от 1000 Å и выш Лавинная ударная ионизация в твердом теле может иметь стационарны

* Данные двух партий сеток: ϕ проволоки 0,03 *мм*, шаг 0,04 *мм* (густая) и 0,3 м (редкая); ϕ проволоки 0,018 *мм*, шаг 0,07 *мм* (густая) и 1,2 *мм* (редкая).

арактер лишь в очень тонких слоях, когда интенсивность лавины ограничена выходом носителей из области сильного поля (например, в лавинных диодах Рида). Вместе с тем можно себе представить, что в сплошном лое диэлектрика устанавливается (за счет ионизации примесей) резко еоднородное распределение поля (см., например [9]) с падением большей асти потенциала непосредственно у поверхности подложки, что может ривести к развитию лавинной ударной ионизации лишь в тонком прионтактном слое, либо непосредственно к туннельной эмиссии из металла диэлектрик без образования лавины. В остальной части диэлектрическо- слоя при этом может установиться поле, недостаточное для развития авины и лишь поддерживающее достаточно высокую для эмиссии и безавинной ионизации примесей эффективную температуру электронов, агодаря чему процесс может приобрести стационарный характер. озможность стационарной самоподдерживающейся эмиссии из сплошных иэлектрических слоев, по-видимому, подтверждается ранними опытами пленками B_2O_3 [6], а возможность туннельной эмиссии из металла слой диэлектрика с последующей эмиссией электронов в вакуум без азвития лавинной ударной ионизации в диэлектрическом слое вытекает з экспериментов М. И. Елинсона и А. Г. Ждана [10].

В пористых системах, к числу которых относится оксидно-магниевый атод, механизм самоподдерживающейся эмиссии, по-видимому, имеет ной характер. Здесь при безопасных в отношении пробоя полях (порядка 10^5 *в/см*) возможно сильное ускорение электронов в порах. Следуя [1, 2, 11], можно допустить, что процесс развития самоподдерживающейся миссии связан в этом случае с образованием электронной лавины по всей олщине слоя за счет выбивания первичными электронами, образовавшимися в глубине слоя, вторичных электронов из зерен MgO, в свою чередь ускоряемых в порах и принимающих участие в дальнейшем развитии лавины. Механизмом, воспроизводящим первичные электроны глубине слоя, может являться как фотоионизация квантами, возникающими при рекомбинации, так и, возможно, туннельный эффект из подожки. Стационарность процесса протекания тока обеспечивается при том за счет дырочной проводимости, возникающей при ударной ионизации зона — зона в зернах MgO.

С этой точки зрения роль активации слоя MgO кислородом может сводиться к созданию акцепторных поверхностных уровней, наличие которых обеспечивает некоторую оптимальную дырочную проводимость ерен MgO при комнатных температурах.

Люминесценция слоя в видимой части спектра может быть, по-видимому, отнесена за счет рекомбинации на кислородных центрах. Температурный ход эмиссионного тока (в случае обратимых изменений) можно связать как с температурными изменениями дырочной проводимости, так с изменениями эффективной температуры электронов в зернах MgO влиянием температуры на выход электронов из зерен в поры.

В пользу лавинной ударной ионизации электронами, ускоренными в порах, свидетельствуют, помимо относительно низких значений средней величины поля в слое (недостаточных для развития лавинной ударной ионизации в сплошной среде), сравнительно высокие средние энергии эмиттируемых электронов (~13 *эв*), превосходящие порог ударной ионизации для MgO, а также возможность получения самоподдерживающейся эмиссии для покрытий большой толщины.

Вместе с тем эти факторы, равно как и независимость эмиссии от наличия и толщины промежуточного слоя NiO, ставят под сомнение возможность считать главным процессом в механизме холодной эмиссии оксидно-магниевого катода туннельную эмиссию из подложки с выходом большей части электронов в вакуум.

Выяснение этого вопроса явится главным объектом последующих исследований.

Как показывают результаты настоящей работы, равно как и результаты, полученные ранее рядом других авторов, оксидно-магниевый катод характеризуется относительно невысокой предельной плотностью тока, весьма неблагоприятной формой распределения эмиттированных электронов по энергиям (широкий спектр в пределах 0—130 *в*) и довольно большим временем формирования эмиссии при включении анодного напряжения, исключающим возможность работы в импульсном режиме. Эти недостатки в известной мере ограничивают область применения данного катода. Вместе с тем ряд преимуществ катода с самоподдерживающейся эмиссией позволит отдать ему предпочтение в тех электронных приборах, в которых указанные его недостатки не являются существенными. В связи с этим постановка дальнейших исследований холодного оксидно-магниевого катода как с целью уточнения представлений о механизме его работы, так и с целью улучшения его эксплуатационных свойств представляется весьма актуальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Dobischek, Electronics and Communs, 1959, **7**, 5, 26.
2. A. M. Skellet, B. G. Firth, D. W. Mayer, Proc. I. R. E., 1959, **47**, 10, 1704.
3. Y. Mizushima, Y. Igarashi, T. Imai, J. Phys. Soc. Japan, 1960, **15**, 4, 729.
4. Р. М. Аранович, И. Г. Ксендзацкий, П. В. Тимофеев, Изв. АН СССР, Отд. техн. н. (Энергетика и автоматика), 1960, 6, 143.
5. H. N. Daglish, Proc. I. E. E., 1961, **108B**, 37, 103.
6. Д. В. Зернов, ЖТФ, 1937, **7**, 1787.
7. Д. В. Зернов, М. И. Елинсон, Н. М. Левин, Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1944, 3, 166.
8. Р. М. Аранович, Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1944, 8, 346.
9. М. И. Елинсон, Д. В. Зернов, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 1, 75.
10. М. И. Елинсон, А. Г. Ждан, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 1, 135.
11. H. Jacobs, J. Freely, T. A. Brand, Phys. Rev., 1952, 88, 3, 492; D. Dobischek, H. Jacobs, J. Freely, Phys. Rev., 1953, **91**, 4, 804.

Поступила в редакцию
23 V 1961

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПОЛУПРОВОДНИК

Г. Ф. Васильев

Получены формулы, описывающие проникновение внешнего электрического поля в полупроводник. Расчет сделан в предположении, что температура электронов в полупроводнике всегда равна температуре решетки.

1. Задача проникновения электрического поля в полупроводник решалась Моргулисом [1] и Стреттоном [2]. Однако их результаты справедливы для двух крайних случаев: когда наклон уровней энергии в полупроводнике ΔR значительно меньше kT [1] (k—постоянная Больцмана, T — абсолютная температура), когда $\Delta R + \zeta$ значительно больше kT [2] (ζ — энергия Ферми). Наиболее интересная промежуточная область не описывается формулами, полученными в указанных выше работах. Формула, справедливая для любого интервала энергии ΔR, необходима в расчетах поля, при котором наступает вырождение свободных носителей заряда в полупроводнике (вырождение наступает тогда, когда дно зоны проводимости пересекает уровень Ферми). Ниже приведен расчет формул, описывающих проникновение поля в полупроводник, которые справедливы для любого энергетического интервала ΔR.

2. Рассмотрим одномерный случай. Уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varkappa},$$

$$\varphi(0) = \Delta R, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = \frac{F}{\varkappa}, \tag{1}$$

$$\varphi(x) \to 0 \qquad \text{при } x \to \infty,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} \to 0 \qquad \text{при } x \to -\infty.$$

Здесь F — электрическое поле; $\varkappa$ — объемный заряд; $\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость. Объемный заряд состоит из заряда носителей тока $\pm en_{1,2}$ (верхний знак относится к электронам или донорам, нижний — к дыркам или акцепторам) и заряда примесных уровней $\pm en_{4,3}$, где $n_{4,3}$ — концентрация ионизованных атомов примеси доноров n_4 или акцепторов N_3.

Количества зарядов на различных примесных уровнях и количества носителей тока находятся между собой в определенных равновесных соотношениях. Число зарядов, одноименных с зарядом носителей тока, просто пропорционально числу последних, и наличие их учитывается умножением $n_{1,2}$ на множитель P, бо́льший единицы, зависящий от концентрации уровней прилипания и их положения относительно дна зоны проводимости. Число же зарядов противоположного знака определяется из условия равновесия. Если число доноров или акцепторов в единице объема равно N_4 или N_3, то при помощи закона действующих масс можно получить

$$n_{4,3} = \frac{N_{4,3}}{1 + C_1 n_{1,2}}. \tag{2}$$

Объемный заряд равен

$$\rho = \mp e^2 \left(P n_{1,2} - \frac{N_{4,3}}{1 + C_1 n_{1,2}} \right), \tag{3}$$

где

$$C_1 = \frac{N_{4,3} - P n_{1,2}^{\infty}}{P n_{1,2}^{\infty 2}}; \tag{4}$$

$n_{1,2}^{\infty}$ — концентрация носителей заряда вдали от поверхности полупроводника. Величину $n_{1,2}$ можно вычислить при помощи интеграла Ферми:

$$n_{1,2} = 4\pi \frac{(2m_{1,2}kT)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + e^{x - \beta_{1,2}}} = C_2 F_{1/2}(\beta_{1,2}), \tag{5}$$

где

$$C_2 = 4\pi \frac{(2m_{1,2}kT)^{3/2}}{h^3};$$

$$F_{1/2}(\beta_{1,2}) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + e^{x - \beta_{1,2}}};$$

$\beta = \zeta/kT$; $x = \varepsilon/kT$; ε — энергия электрона; индексы 1, 2 относятся соответственно к электронному и дырочному полупроводникам. После интегрирования по частям и разбивки пределов интегрирования интеграл Фермии можно записать в виде

$$2F_{1/2}(\beta_{1,2}) = \int_0^{\beta_{1,2}} x^{-1/2} (\beta - x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^{\beta_{1,2}} e^{-ny} (\beta - y)^{-1/2} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^{\infty} e^{-ny} (\beta + y)^{-1/2} dy. \tag{6}$$

Здесь $y = \beta - x$.

Если $\beta \gg 1$, то

$$(\beta - y)^{-1/2} \simeq \beta^{-1/2},$$

$$(\beta + y)^{-1/2} \simeq \beta^{-1/2}.$$

В этом случае получим

$$F_{1/2}(\beta_{1,2}) \simeq \frac{2}{3} \beta_{1,2}^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \beta_{1,2}^{-1/2}. \tag{7}$$

При $\beta \ll 1$ основную роль играет экспонента, поэтому

$$F_{1/2}(\beta_{1,2}) \simeq \frac{\pi^2}{10} \ln (1 + e^{\beta_{1,2}}). \tag{8}$$

Более удобная для интегрирования функция может быть представлена в виде

$$\frac{\pi^2}{11} \frac{e^{\beta_{1,2}}}{1 + \frac{e^{\beta_{1,2}}}{4}} \simeq \frac{\pi^2}{10} \ln (1 + e^{\beta_{1,2}}). \tag{9}$$

В таблице даны числовые значения полученных функций, а также значения интеграла Ферми, взятые из таблиц Стоннера и Мак Дугала [3]. Отсчет энергии Ферми в электронном полупроводнике будем производить от дна зоны проводимости вверх, а в дырочном полупроводнике — от потолка заполненной зоны вниз.

Используя функцию (9), а также (1) и (3) в области $\beta \leqslant 2$, получим

$$F^2 = 8\pi e^2 \varkappa kT \left\{ PC_2 \ln \frac{4+\exp\left(\frac{\zeta+\Delta R}{kT}\right)}{4+\exp\left(\frac{\zeta}{kT}\right)} - N_{4,3}\frac{\Delta R}{kT} + \right.$$
$$\left. + \frac{4\frac{\pi^2}{11}C_2C_1N_{4,3}}{1+4\frac{\pi^2}{11}C_2C_1} \ln \frac{4+\left(1+4\frac{\pi^2}{11}C_2C_1\right)\exp\left(\frac{\Delta R+\zeta}{kT}\right)}{4+\left(1+4\frac{\pi^2}{11}C_2C_1\right)\exp\left(\frac{\zeta}{kT}\right)} \right\}. \qquad (10)$$

β	$\frac{\pi^2}{10}\ln(1+e^{\beta})$	$\frac{\pi^2}{11}\frac{e^{\beta}}{1+e^{\beta/4}}$	$\frac{2}{3}\beta^{3/2}\frac{\pi^2}{12}\beta^{-1/2}$	$F_{1/2}(\beta)$
—5	0,0067	0,0060	—	0,0060
—4	0,017	0,0161	—	0,0161
—3	0,049	0,0439	—	0,0434
—2	0,128	0,1165	—	0,1146
—1	0,306	0,301	—	0,2905
0	0,683	0,7168	—	0,6781
1	1,290	1,4515	—	1,3964
2	—	2,325	2,46	2,5025
3	—	2,99	3,93	3,977

Формула (10) дает результат Моргулиса — Стреттона [1, 2], если $\Delta R \ll kT$, $\exp(\zeta/kT) \ll 1$. Действительно, в этом случае имеем

$$\frac{\Delta R}{kT} \simeq 1 - \exp\left(-\frac{\Delta R}{kT}\right),$$

$$\ln \frac{4+\exp\left(\frac{\zeta+\Delta R}{kT}\right)}{4+\exp\left(\frac{\zeta}{kT}\right)} \simeq \frac{1}{4}\exp\left(\frac{\zeta}{kT}\right)\left[\exp\left(\frac{\Delta R}{kT}-1\right)\right];$$

$$\ln \frac{4+\left(1+4\frac{\pi^2}{11}C_2C_1\right)\exp\left(\frac{\Delta R+\zeta}{kT}\right)}{4+\left(1+4\frac{\pi^2}{11}C_2C_1\right)\exp\left(\frac{\zeta}{kT}\right)} \simeq 0.$$

В численных коэффициентах, положив $m_1 = m_2 = m$ (m — масса свободного электрона), (10) можно записать в виде

$$F^2 = 3{,}08\cdot 10^{-10}\varkappa T \left\{ 2{,}23\cdot 10^{16}T^{3/2}P \ln \frac{4+\exp\left(\frac{\zeta+\Delta R}{kT}\right)}{4+\exp\left(\frac{\zeta}{kT}\right)} - N_{4,3}\frac{\Delta R}{kT} + \right.$$
$$\left. + \frac{2{,}23\cdot 10^{16}T^{3/2}C_1N_{4,3}}{1+2{,}23\cdot 10^{16}T^{3/2}C_1} \ln \frac{4+(1+2{,}23\cdot 10^{16}T^{3/2}C_1)\exp\left(\frac{\Delta R+\zeta}{kT}\right)}{4+(1+2{,}23\cdot 10^{16}T^{3/2}C_1)\exp\left(\frac{\zeta}{kT}\right)} \right\} \left(\frac{эв}{см}\right)^2.$$

Вырождение наступает при $\Delta R = -\zeta$. Для n-германия при $T = 300°$ К $N_4 = 10^{14}$ $см^{-3}$; если $P = 1$, вырождение наступает при $F = 5\cdot 10^6$ $эв/см$. Формула (10) справедлива до $\Delta R = -\zeta + 2kT$.

При $\beta > 2$ (1), (3) и (7) дают

$$F^2 = 8\pi e^2 \varkappa\ kTPC_2\left[\frac{4}{15}\left(\frac{\Delta R+\zeta}{kT}\right)^{5/2} + \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\Delta R+\zeta}{kT}\right)^{1/2} - 2{,}08\right]. \qquad (11)$$

При получении выражения (11) мы пренебрегли зарядами на примесных уровнях. В численных коэффициентах (11) можно представить в виде (если $m_1 = m_2 = m$)

$$F^2 = [2{,}7 \cdot 10^{16} \varkappa (\Delta R + \zeta)^{5/2} + 1{,}22 \cdot 10^{9} \varkappa T^2 (\Delta R + \zeta)^{1/2} - $$

$$- 1{,}43 \cdot 10^{7} \varkappa T^{5/2}] \left(\frac{эв}{см}\right)^2.$$

Если в (11) пренебречь двумя последними членами в квадратных скобках, то получим результат Стреттона [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Моргулис, ЖЭТФ, 1948, 16, 11, 959.
2. R. Stratton, Proc. Phys. Soc. B., 1955, 68, 430, 746.
3. J. McDougall, E. C. Stoner, Helv. phys. acta, 1955, 28, 5—6, 534.

Поступила в редакцию
7 IX 1960

1961 № 10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ НЕРАВНОВЕСНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПЛОТНОСТИ ШУМА

Л. Я. Первова

Из спектрального распределения шума определено время жизни неравновесных носителей тока, а также по известной концентрации центров рекомбинации — соответствующее сечение захвата. Сечение захвата дырки однократно заряженным атомом золота в германии оказалось равным $(2{,}3—3{,}1)\cdot 10^{-14}$ *см*^{2}.

В работе [1] указано, что исследование спектрального распределения плотности шума в полупроводниках дает возможность определять в них время жизни неравновесных основных носителей тока.

Действительно, можно считать установленным, что в области малых и средних частот спектр шума может быть представлен выражением вида (см., например, [2])

$$F(\omega) = \frac{A}{\omega^m} + \frac{B}{1+(\omega\tau)^2} \quad (m \simeq 1), \tag{1}$$

где первый член представляет собой составляющую шума, именуемую в литературе «$\frac{1}{f}$-шумом» (в обсуждение механизма его мы не будем вдаваться), а второй член — генерационно-рекомбинационный (дробовой) шум, обязанный своим происхождением флуктуациям концентрации носителей тока в полупроводнике.

В области низких частот преобладает обычно шум $1/\omega$, однако с ростом частоты он быстро убывает до тех пор, пока при некоторой частоте $\omega_1 = 2\pi f_1$ эта составляющая шума не станет пренебрежимо малой по сравнению с генерационно-рекомбинационным шумом. Если эта частота такова, что еще $\omega\tau \ll 1$, то спектральная плотность шума становится не зависящей от частоты. Наконец, при частотах $\omega \to 1/\tau$ начинается спад кривой шума и $F(\omega)$ становится обратно пропорциональной квадрату частоты.

В точке, где $F(\omega) = \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} = \frac{1}{2}$,

$$\omega\tau = 1. \tag{2}$$

Это приводит к непосредственному определению времени жизни τ.

В случае, когда по тем или иным причинам затруднительно достичь спадающей ветви генерационно-рекомбинационного шума, для определения времени жизни τ можно воспользоваться известным выражением для генерационно-рекомбинационного шума

$$\langle \overline{i_ш^2} \rangle = 4eI \frac{\tau}{\tau_L} \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} \Delta f, \tag{3}$$

где $\tau_L = L/\mu E$ — время пробега носителем пути, равного длине образца L; μ — подвижность носителей тока.

Это выражение справедливо, если энергетический зазор ΔE между уровнем и зоной, с которой происходит обмен носителями тока, много больше kT.

Зная подвижность носителей тока μ и измерив $\langle i_{ш}^2 \rangle$ в области плато, где спектральная плотность шума не меняется с частотой, можно определить время жизни τ из этих измерений, либо, наоборот, найдя τ из условия (2), определить по измерениям $\langle i_{ш}^2 \rangle$ подвижность носителей тока.

Описываемый метод определения времени жизни τ обладает, как нам представляется, по меньшей мере двумя очевидными достоинствами: во-первых, он позволяет измерять τ в условиях весьма малых отклонений от равновесия (малых уровней «инжекции») и, во-вторых, он относительно простым способом позволяет измерять малые времена жизни τ даже в тех случаях, когда они составляют всего лишь десятые или даже сотые доли микросекунды.

Отметим также, что метод этот основан на весьма общих термодинамических соображениях, лежащих в основе расчета генерационно-рекомбинационного шума, и поэтому применим, по-видимому, во всех случаях, когда экспериментально можно выделить генерационно-рекомбинационный шум.

В качестве примера ниже приведены результаты измерения времени жизни дырок в германии *p*-типа, легированном золотом и в различной степени компенсированном сурьмой.

Измерения проводились на анализаторе звуковых частот с шириной полосы пропускания $\Delta f_{эф} = 4$ *гц*. Шум образцов усиливался усилителем с коэффициентом усиления около $2 \cdot 10^5$. Вся установка градуировалась по шуму вакуумного сурьмяно-цезиевого фотоэлемента. Специальные измерения показали, что этот шум — белый во всем диапазоне использованных частот.

Измеряемые образцы помещались в криостат, обеспечивавший температуру 80° К.

Спектральные характеристики плотности шума четырех образцов, отнесенные к 1*в* напряжения на образце, представлены на рисунке. Как видно из рисунка, генерационно-рекомбинационный шум отчетливо проявляется, начиная с частоты $f > 8 \cdot 10^3$ *гц*. Ограничение аппаратуры по высшей частоте анализатора 20 000 *гц* не позволило наблюдать на этих образцах спадающую ветвь генерационно-рекомбинационного шума (образец 34-*в* был промерен до частоты 35 000 *гц* на анализаторе АС-3).

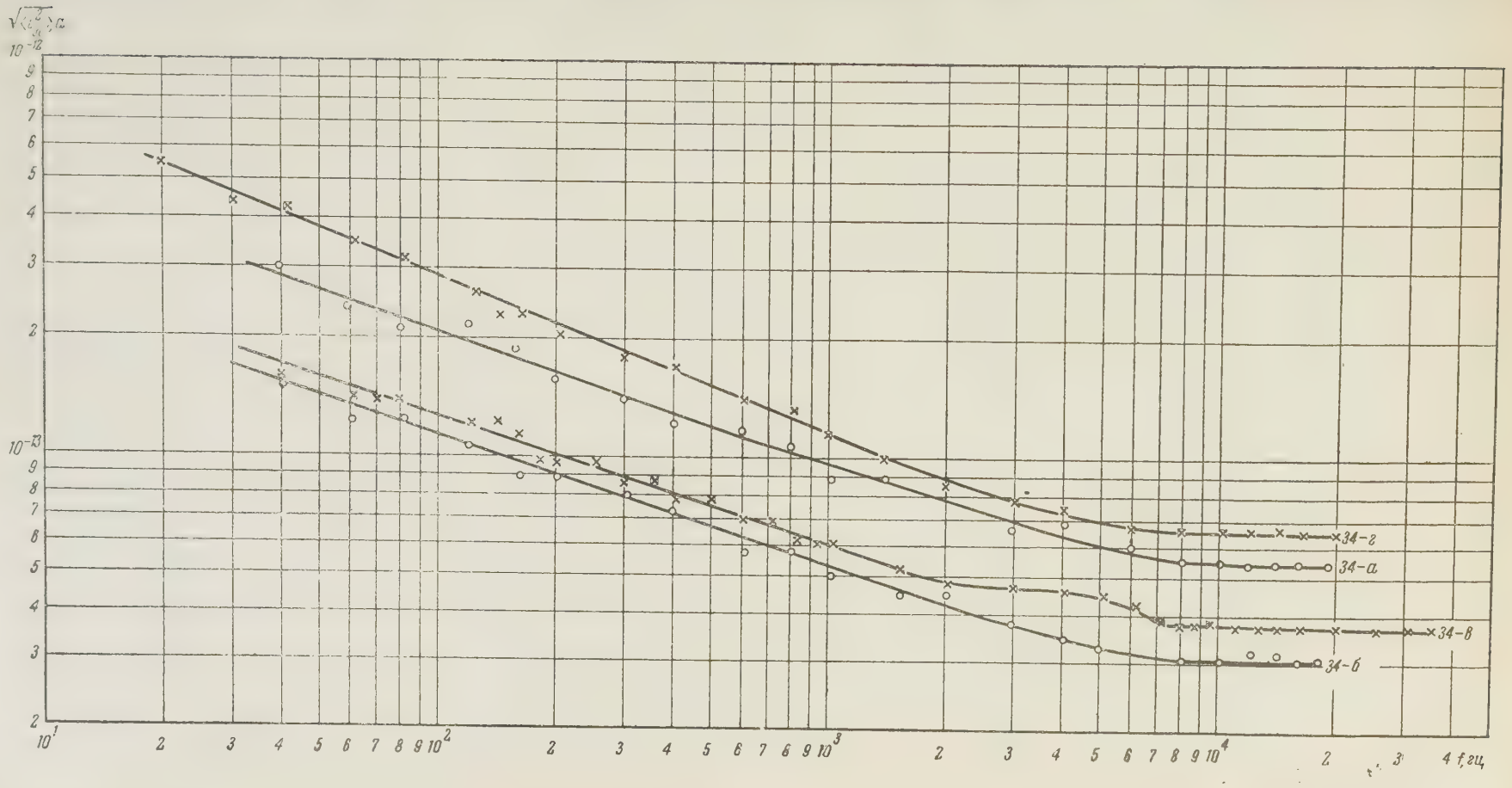
Расчет по формуле (3) с учетом подвижности носителей тока, длины образцов $L = 6$ *мм* и протекающего через образец тока I приводит к величинам времени жизни τ, указанным в таблице.

№ образца	N_{Au}, $см^{-3}$	N_{Sb}, $см^{-3}$	μ, $\frac{см^2}{в \cdot сек}$	I, на 1 *в*, *мка*	τ, *сек*	σ, $см^2$
34-*г*	$1{,}81 \cdot 10^{15}$	$5{,}6 \cdot 10^{13}$	$1{,}3 \cdot 10^4$	2,66	$5{,}75 \cdot 10^{-8}$	$3{,}1 \cdot 10^{-14}$
34-*б*	$2{,}5 \cdot 10^{15}$	$6{,}9 \cdot 10^{13}$	$1{,}05 \cdot 10^4$	1,1	$5{,}50 \cdot 10^{-8}$	$2{,}6 \cdot 10^{-14}$
34-*а*	$1{,}65 \cdot 10^{15}$	$9{,}10^{13}$	$2{,}2 \cdot 10^4$	1,96	$4{,}2 \cdot 10^{-8}$	$2{,}6 \cdot 10^{-14}$
34-*в*	$4{,}25 \cdot 10^{15}$	$2{,}02 \cdot 10^{14}$	$1{,}68 \cdot 10^4$	2,22	$2{,}1 \cdot 10^{-8}$	$2{,}34 \cdot 10^{-14}$

В таблице приведены концентрации золота N_{Au} и компенсирующей примеси сурьмы N_{Sb} *.

Полагая, что приведенные значения τ связаны с рекомбинацией дырок на однократно заряженных центрах золота, число которых N_{Au}, очевидно, равно N_{Sb}, находим эффективное сечение рекомбинации дырок

* Автор приносит благодарность В. Г. Алексеевой за приготовление образцов и В. И. Сидорову за измерение концентрации примесей и подвижности носителей тока в них.


$\sqrt{\overline{i_ш^2}}$, а
10^{-12}
9
8
7
6
5
4
3
2
10^{-13}
9
8
7
6
5
4
3
2
10^1
2
3
4
5
6
7
8
9
10^2
2
3
4
5
6
7
8
9
10^3
2
3
4
5
6
7
8
9
10^4
2
3
4
f, гц
34-г
34-а
34-в
34-б

на этих центрах:

$$\sigma_{Au^-} = \frac{1}{N_{Au}^{-} v\tau},$$

где $v = 10^7$ *см/сек* — тепловая скорость дырок.

Числовые значения сечений рекомбинации приведены в последней графе таблицы. Эти значения близки к найденному Рупрехтом [3] значению $\sigma_{Au} = 5{,}7 \cdot 10^{-14}$ *см*^{2}.

В заключение следует указать, что, исследуя спектр шума при использовании подсветки образцов монохроматическим светом с различной длиной волны, можно определять характеристические времена и соответствующие эффективные сечения для различных примесных центров в полупроводниках.

Автор выражает благодарность В. Н. Макарову, принимавшему участие в измерениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Я. Первова, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 2, 330.
2. А. ван-дер-Зил, Флуктуации в радиотехнике и физике, перев. с англ., ГЭИ, 1958, стр. 140.
3. G. Rupprecht, Proc. Internat. Conf. Semic. Phys., Prague, 1960, 282.

Поступила в редакцию
24 I 1961

1961 № 10

ПРЕЦИЗИОННЫЕ ТРАНЗИСТОРНЫЕ УСИЛИТЕЛИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ С ВЫСОКИМИ ВХОДНЫМИ (ИЛИ ВЫХОДНЫМИ) СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

Ю. Л. Куркин, Н. С. Куркина

Предложены методы построения схем на транзисторах, обеспечивающие высокие входные $r_{вх}$ и (или) выходные $r_{вых}$ сопротивления усилителей тока, напряжения и преобразователей напряжения в ток. Показано, что высокое выходное сопротивление $r_{вых} \gg r_к$ таких схем может быть получено только при помощи положительной обратной связи. Описаны конкретные схемы, приведены их некоторые практические характеристики. Показано, как включать цепи смещения, чтобы они не шунтировали высоких сопротивлений $r_{вх}$ и $r_{вых}$.

В технике электронных моделирующих устройств используются прецизионные усилители напряжения с высоким входным сопротивлением $r_{вх}$ или усилители тока с очень высоким выходным сопротивлением $r_{вых}$ [1, 2]. При создании транзисторных усилителей очень важным моментом является уменьшение чувствительности параметров усилителя к изменениям параметров активных элементов. Стабилизация обеспечивается применением обратных связей. В частности, усилители тока, которые должны иметь низкое входное и высокое выходное сопротивления, стабилизируются параллельно-последовательной обратной связью.

В существующих схемах усилителей тока с обратной связью (рис. 1) выходное сопротивление ограничено величиной сопротивления коллектора $r_{к3}$ выходного транзистора, которое шунтирует выход при любой глубине отрицательной обратной связи. Действительно, переходя к пределу при $\alpha \to 1$ в выражении для $r_{вых}$ (табл. 1, схема рис. 1) получаем $r_{вых} \to r_{к3}$.

Высокое выходное сопротивление $r_{вых} \gg r_к$ получается, если ввести большую положительную обратную связь. Схема, показанная на рис. 2, отличается необычайно высоким выходным сопротивлением $r_{вых} \gg r_{к3}$, намного превышающим сопротивление коллектора выходного транзистора. Характерной особенностью этой схемы является совместное использование общей отрицательной обратной связи и местной положительной обратной связи. Такая многопетлевая обратная связь приводит к увеличению стабильности параметров схемы и уменьшению чувствительности их параметров к изменениям свойств активных элементов [3]. При разомкнутой петле отрицательной обратной связи (сопротивление $(1 - h)R$) замыкается и цепь положительной обратной связи, охватывающая T_1, T_2. Остается лишь обратная связь с базы в эмиттер T_3 через транзистор T_2. Глубина этой обратной связи не превышает $\alpha_2 (1 - \alpha_3) \ll 1$, поэтому проблема устойчивости не возникает.

Входное $r_{вх}$ и выходное $r_{вых}$ сопротивления и усиление по току схемы, показанной на рис. 2, указаны в табл. 1.

DCC LIBRARY

Таблица 1

Параметры усилителей тока с высоким выходным сопротивлением

Схема	A_i	$r_{вых}$	$r_{вх}$
Рис. 1	$\dfrac{\alpha_1\alpha_3\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)}{\alpha_1+\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}$	$r_{кз}\dfrac{\alpha_1+\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}{\alpha_1+\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \leqslant r_{кз}$	$\dfrac{{}_1h_{11}(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)}{\alpha_1+\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} \leqslant 0{,}05 ом$
Рис. 2	$\dfrac{1+\dfrac{R}{R_э}}{1+\dfrac{1-\alpha_3}{\alpha_1\alpha_3}\left\{(1-\alpha_2)\left[1+\dfrac{R}{R_э}(1-\alpha_1)\right]-h\dfrac{R}{R_э}\alpha_1\alpha_2\right\}}$	$\dfrac{\alpha_1\alpha_2 r_{кз}\left\{1+\dfrac{1-\alpha_3}{\alpha_1\alpha_3}\left\{(1-\alpha_2)\left[1+\dfrac{R}{R_э}(1-\alpha_1)\right]-h\dfrac{R}{R_э}\alpha_1\alpha_2\right\}\right\}}{(1-\alpha_2)\left[1+\dfrac{R}{R_э}(1-\alpha_1)\right]-h\dfrac{R}{R_э}\alpha_1\alpha_2}$	$\dfrac{{}_1h_{11}(1-\alpha_2)(1+\alpha_3)\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)}{\alpha_1\alpha_3+(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)-h\dfrac{R}{R_э}\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_3)}$
Рис. 2 $h=h_{опт}$	$1+\dfrac{R}{R_э}$	$\simeq\dfrac{r_{кз}}{(1-\alpha_2)}\dfrac{1}{\dfrac{\Delta h}{h}}$	$\dfrac{{}_1h_{11}(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)}{\alpha_1\alpha_3+\dfrac{R}{R_э}(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}$

Можно показать, что существует оптимальная глубина положительной обратной связи. Действительно, при

$$h = h_{\text{опт}} = \frac{(1-\alpha_2)\left[1+(1-\alpha_1)\dfrac{R}{R_э}\right]}{\alpha_1\alpha_2\dfrac{R}{R_э}} \simeq \frac{1}{20} \qquad (1)$$

знаменатель $r_{\text{вых}}$ исчезает и $r_{\text{вых}} \to \infty$, а $A_i \to 1 + \dfrac{R}{R_э}$. Легко видеть, что $h_{\text{опт}}$ — функция α_1 и α_2, т. е. функция температуры и режима.

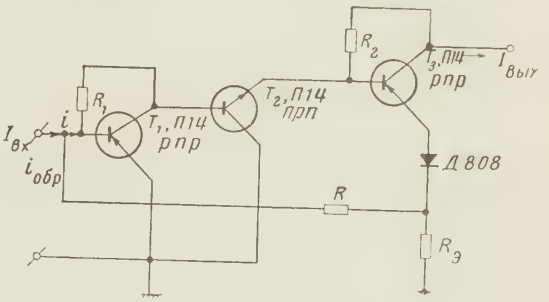


Рис. 1. Схема усилителя тока с обратной связью; выходное сопротивление ограничено шунтирующим действием $r_к$

Пусть $h = h_{\text{опт}} - \Delta h$.
Тогда

$$r_{\text{вых}} = r_{\text{кз}} \frac{\alpha_3 + (1-\alpha_3)\,h\,\dfrac{\Delta h}{h}\,\dfrac{R}{R_э}\,\alpha_2}{h\,\dfrac{\Delta h}{h}\,\dfrac{R}{R_э}\,\alpha_2}. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) $h = h_{\text{опт}}$, получаем

$$\frac{r_{\text{вых}}}{r_{\text{кз}}} = \frac{\alpha_1\alpha_3 + (1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\left[1+\dfrac{R}{R_э}(1-\alpha_1)\right]\dfrac{\Delta h}{h}}{(1-\alpha_2)\left[1+\dfrac{R}{R_э}(1-\alpha_1)\right]\dfrac{\Delta h}{h}}, \qquad (3)$$

$$r_{\text{вых}} = \frac{r_{\text{кз}}}{1-\alpha_2}\,\frac{1}{\dfrac{\Delta h}{h}}.$$

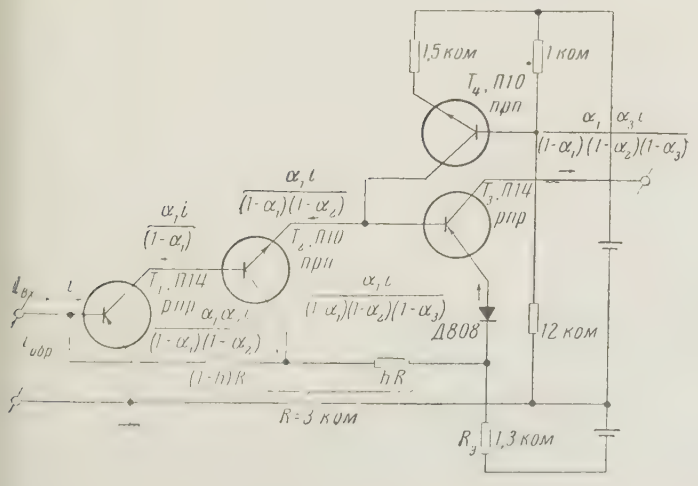


Рис. 2. Схема усилителя тока со смешанной (положительной и отрицательной) обратной связью, обеспечивающей высокое выходное сопротивление $r_{\text{вых}} \gg r_к$

Практически

$$\frac{\Delta h}{h} = 10 - 20\% = -\left\{\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1}\,\frac{1+\dfrac{R}{R_э}}{1+\dfrac{R}{R_э}(1-\alpha_1)} + \frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2}\,\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\right\},$$

т. е. $r_{вых} = 50 \div 300$ *Мом.*
При $h = h_{опт}$

$$Z_{вх} = Z^*_{вх} = \frac{{}_1h_{11}(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)}{\alpha_1\alpha_3 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\dfrac{R}{R_э}}.$$

Стабильность усиления по току

$$\frac{\Delta A_i}{A_i} = \frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1}\,\frac{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\left(1+\dfrac{R}{R_э}\right)}{\alpha_1\alpha_3} +$$

$$+\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2}\,\frac{1-\alpha_3}{\alpha_1\alpha_3}\left[1+\frac{R}{R_э}(1-\alpha_1)\right]\left[1-(1-\alpha_2)\frac{\Delta h}{h}\right] +$$

$$+\frac{\Delta\alpha_3}{\alpha_3}\,\frac{\dfrac{\Delta h}{h}(1-\alpha_2)\left[1+\dfrac{R}{R_э}(1-\alpha_1)\right]}{\alpha_1\alpha_3}.$$

Легко видеть, что введение оптимальной положительной обратной свя
увеличивает стабильность схемы. При $h = h_{опт}$ усиление схемы не завис
от α_3.

Выражение для $r_{вых}$ (табл. 1) может быть получено, если в выражен
для A_i (вместо α_3 подставить его динамическое значение $\alpha_3 \Big/ \left(1+\dfrac{Z_н}{r_{кз}}\right)$
Тогда A_i можно представить в виде $A_{iкз} \Big/ \left(1+\dfrac{Z_н}{r_{вых}}\right)$.

Возвратная разность для схемы, показанной на рис. 2, может быт
получена, если разорвать цепь отрицательной обратной связи (сопр
тивление $R\,(1-h)$), а свободный конец $R\,(1-h)$ присоединить к земл
Учитывая зависимости α_1 и α_2 от R, $R_э$, определяющих входное сопр
тивление второго и третьего каскадов и выходное сопротивление перво
каскада $h_{11}/(1-\alpha_1)$, можно показать, что при заданном $R/R_э$ существу
оптимальная величина сопротивлений R, $R_э$, обеспечивающая максиму
возвратной разности. Практически $R_{опт} = 0{,}5 - 1$ *ком* при $R/R_э = 1$

Рассмотрение структуры выражений для параметров усилителей ток
(табл. 1) показывает, что исследование схем с целью получения высоко
выходного сопротивления производится в следующей последовательност

а) Выводится усиление по току $A_i = A_i(Z_н)$; в числителе A_i ест
множитель α_3 — передача тока выходного транзистора; α_3 зависит о
нагрузки: $\alpha_3 = \alpha_{3_0} \Big/ \left(1+\dfrac{Z_н}{r_{кз}}\right)$. Это обстоятельство и ограничивает
обычных схемах $r_{вых}$ величиной $r_{кз}$.

б) Приводим подобные члены знаменателя, содержащие α_3.

в) Налагаем условие, чтобы все члены знаменателя, не содержащие α_3
равнялись нулю, что возможно лишь при наличии в знаменателе члено
со знаком минус, вносимых положительной обратной связью, охватываю
щей выходные каскады. При этом сокращаются α_3 числителя и знамена
теля. Следовательно, $r_{кз}$ более не ограничивает выходное сопротивлени

схемы. Отсюда следует, что получение высоких выходных сопротивлений в транзисторных схемах, намного превосходящих сопротивление коллектора выходного транзистора ($r_{вых} \gg r_к$), возможно лишь в схемах с положительной обратной связью, охватывающей выходные каскады. Некоторые экспериментальные характеристики схемы, показанной на рис. 2, приведены на рис. 3, *а*, *б*.

Высокое входное сопротивление в транзисторном усилителе напряжения можно получить с одной только отрицательной (параллельно-последовательной) обратной связью. Следует обратить внимание на то, чтобы получающееся высокое входное сопротивление не шунтировалось цепями смещения и сопротивлениями коллектора $r_{к1}$, $r_{к2}$ и т. д. Цепи смещения (сопротивления R_1, R_2 и т. д., см. рис. 4) включаются параллельно выводам база — коллектор соответствующих транзисторов. Для исключения утечек через параллельные соединения $r_{к1}R_1/(r_{к1}+R_1)$, $r_{к2}R_2/(r_{к2}+R_2)$ и т. д. соответствующие коллекторы должны быть включены на часть выходного напряжения, равную или близкую по величине входному напряжению, непосредственно или через небольшие входные сопротивления последующих каскадов.

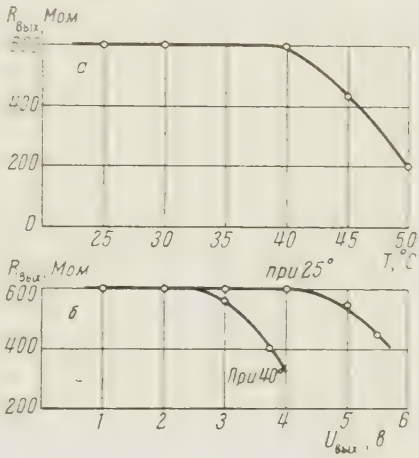


Рис. 3. Зависимость $R_{вых}$ от температуры (*а*) и выходного напряжения (*б*)

На рис. 4 приведена схема усилителя напряжения, имеющего высокое входное сопротивление $r_{вх} \gg r_к$ (порядка 500 — 2000 *Мом*):

$$r_{вх} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[\frac{1}{R_э} + \frac{1}{R_3(1-\alpha_3)} + \frac{1}{r_{к3}(1-\alpha_3)}\right] + \left(1-\frac{R}{R_4}\right)\left[\frac{1}{Z_н} + \frac{1}{r_{к4}(1-\alpha_4)}\right]}.$$

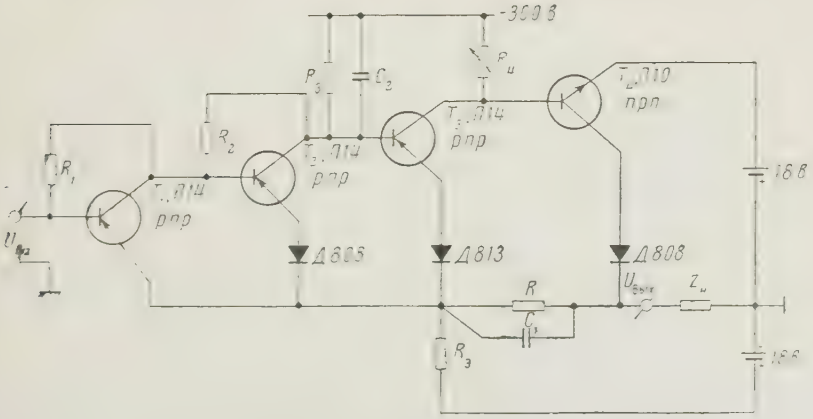


Рис. 4. Схема усилителя с высоким входным сопротивлением

Полное входное сопротивление является параллельным соединением трех сопротивлений:

$$\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 R_э}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)};\quad \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 (R_3 \parallel r_{к3})}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)};$$

$$\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 r_{к4}}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\left(1+\frac{R}{R_э}\right)}.$$

Стабильность коэффициента усиления по напряжению при изменении режима, температуры или при замене транзисторов обеспечивается последовательно-параллельной отрицательной обратной связью, которая увеличивает входное и уменьшает выходное сопротивления.

Поскольку транзистор обладает конечным усилением по мощности, увеличение входного сопротивления возможно лишь за счет уменьшения

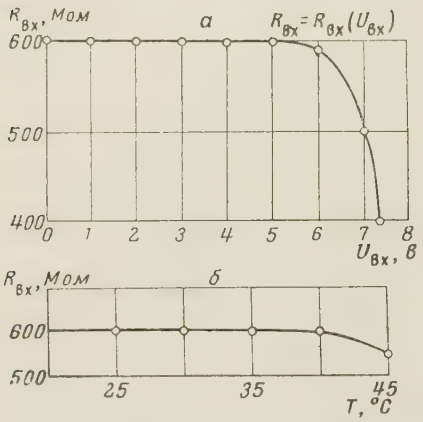


Рис. 5. Практические характеристики схемы усилителя, показанной на рис. 4; зависимость входного сопротивления от температуры (*а*) и уровня сигнала (*б*)

усиления по напряжению. Правда, усиление по напряжению при этом стабилизируется. Усиление по напряжению

$$A_V = \frac{\frac{1}{R_э}+\frac{1}{R}+\frac{1}{r_{к3}(1-\alpha_3)}+\frac{1-\alpha_4}{\alpha_4 R}\left[1+\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right]}{\frac{1}{R}+\frac{1-\alpha_4}{\alpha_4}\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{Z_н}+\frac{1}{r_{к4}(1-\alpha_4)}\right]\left[1+\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right]},$$

$$A_V = \frac{\left(1+\frac{\alpha_4 R}{R_э}\right)+\frac{\alpha_4 R}{r_{к3}(1-\alpha_3)}}{1+\frac{(1-\alpha_4)R}{Z_н}+\frac{R}{r_{к4}}} = 1+\frac{\alpha_4 R}{R_э}.$$

Сопротивления R_1 и R_2 не шунтируют вход, так как их свободные концы включены через низкоомные входные цепи транзисторов T_1 и T_2 на напряжение U_1, практически равное входному напряжению. В отсутствие обратной связи с последнего каскада ток через $R_э$ в $\alpha_1\alpha_2\alpha_3/(1-\alpha_1)\times(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)$ раз больше тока на входе. Следовательно, $R_э$ дает входное сопротивление $\sim\alpha_1\alpha_2\alpha_3 R_э/(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)$. Параллельно-последовательная обратная связь увеличивает $r_{вх}$ еще в $1/(1-\alpha$ раз. Легко видеть (рис. 4), что $R_3(1-\alpha_3)$ и $r_{к3}(1-\alpha_3)$ подключаются параллельно $R_э$. Выходное сопротивление схемы

$$r_{вых} = \frac{(R+R_э)\left[R_г+\frac{RR_э}{R+R_э}\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}\right]}{R_г+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 R_э}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)}}.$$

На рис. 5, *а*, *б* приведены некоторые экспериментальные характеристики усилителя напряжения.

Рассмотрим теперь транзисторный усилитель с высоким входным и выходным сопротивлениями, намного превышающими сопротивление коллектора $r_к$ применяемых транзисторов. Такого рода усилители называют преобразователями напряжения в ток или идеальными пентодами [4].

Входное и выходное сопротивления увеличиваются введением последовательной обратной связи. В существующих схемах это увеличение ограничивается величиной $r_к$.

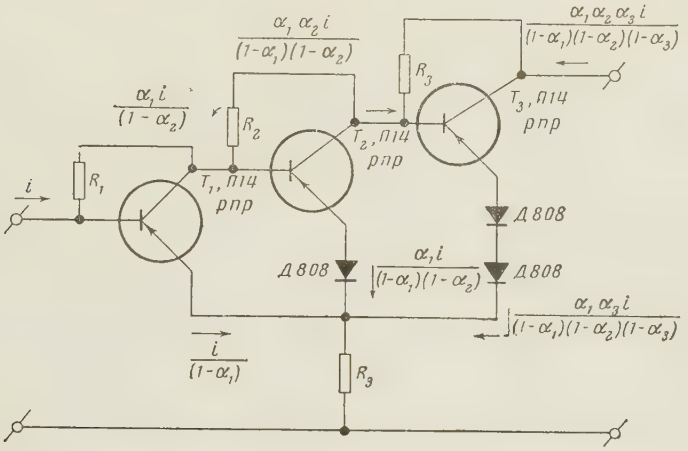


Рис. 6. Схема преобразователя напряжения в ток с высоким входным и выходным сопротивлениями

Предлагаемая нами схема, представленная на рис. 6, позволяет преодолеть это ограничение благодаря совместному использованию общей отрицательной и местной положительной обратных связей.

Таблица 2

Параметры высокоомного преобразователя напряжения в ток

Крутизна

$$S = \frac{I_{вых}}{U_{вх}} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left[\frac{1}{R_э} + \frac{1}{1-\alpha_3}\left(\frac{1}{r_{кз}} + \frac{1}{R_3}\right)\right]}{\alpha_1\alpha_1\alpha_3 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}$$

Входное сопротивление

$$r_{вх} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}{\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}{R_э} + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\left(\frac{1}{r_{кз}} + \frac{1}{R_3}\right)}$$

Выходное сопротивление ($r_{вых}$) при коротком замыкании на входе

$$r_{вых} = \frac{(r_{кз} \parallel R_3)\left[\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\right]}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\left[\frac{\frac{1}{R_э} + \frac{1}{r_{кз}} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_э} + \frac{1}{1-\alpha_3}\left(\frac{1}{r_{кз}} + \frac{1}{R_3}\right)}\right]$$

В табл. 2 приведены некоторые параметры схемы, показанной на рис. 6.

В этих формулах в состав $r_{кз}$ следует включать параллельно сопротивление R_3, обеспечивающее питание выходного транзистора.

Все формулы выведены в предположении, что внешние сопротивлени $R \gg h_{11}$.

Учет собственных входных сопротивлений транзистора $h_{11}/(1-\alpha$ приводит к незначительному увеличению получаемых высоких входны или выходных сопротивлений.

Приведенные выражения дали хорошее совпадение с экспериментом в пределах, определяемых изменениями параметров транзисторов с тем пературой и режимом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Куркин, Н. С. Куркина, Прецизионный транзисторный интегра тор, Автоматика и телемеханика, 1961, 22, 7, 907.
2. Edvard M. Davis, Comparisons between multiple loop and single loop tran sistor feedback amplifiers, IRE Wescon Convention Record, 1959, p. 78—86.
3. M. Kawakami, Some fundamental consideration on active four-terminal linea network, IRE Trans., 1958, CT-5, 2, 115.
4. Ю. Л. Куркин, А. А. Соколов, Отрицательный импедансный конверте на полупроводниковых триодах, Электричество, 1959, 9, 66.

Поступила в редакцию
3 XI 1960
После переработки
23 VII 1961

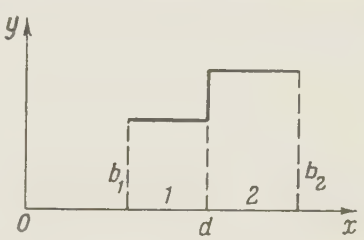
1961 № 10

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СВЯЗИ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ С МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. Я. Яшкин

В ряде работ [1, 2, 3] по расчету волноводов применен метод неопределенных коэффициентов [4], причем отмечено предпочтение этого метода перед методом интегрального уравнения [5], так как он якобы не связан с аппроксимацией неизвестной функции. На самом деле метод неопределенных коэффициентов, так же как и второй метод, основан на аппроксимации неизвестной функции, но в качестве аппроксимирующих функций берутся всегда функции, через которые задаются исходные поля, тогда как при решении интегрального уравнения в качестве аппроксимирующих функций могут быть использованы любые функции, образующие на данном отрезке полную систему.



Ниже показано, что метод неопределенных коэффициентов является частным случаем метода интегрального уравнения, а именно тем случаем, когда в качестве аппроксимирующих функций при решении уравнения выбираются функции, через которые заданы исходные поля. Как частный случай, метод неопределенных коэффициентов, естественно, беднее более общего метода, и, следовательно, ни о каком противопоставлении его методу интегрального уравнения не может быть и речи.

Справедливость высказанного положения можно показать прямым расчетом по тому и другому методам. Мы ограничимся рассмотрением вопроса в прямоугольной декартовой системе. Однако, как легко видеть [6], аналогичное рассуждение можно провести в любой другой системе координат с разделяющимися переменными, так как используемая здесь ортогональность собственных функций волнового уравнения в декартовой системе сохраняется для волновых уравнений в других системах, допускающих разделение переменных.

Пусть волновод, по которому распространяется волна типа H, имеет в сечении ступенчатую форму. Разобьем ступенчатое сечение на ряд прямоугольных областей и выберем две соседние области, которые обозначим номерами *1*, *2* (рисунок). Запишем для каждой области общее решение волнового уравнения для осевой составляющей $H_z = H(x, y)$ в виде бесконечной суммы частных решений, отвечающих одному и тому же значению собственного числа k:

$$H_1 = C_{10}\cos k(x-\alpha_1) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{1m}\cos r_{1m} y \operatorname{ch} r'_{1m}(x-\alpha_1),$$

$$H_2 = C_{20}\cos k(x-\alpha_2) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}\cos r_{2n} y \operatorname{ch} r'_{2n}(x-\alpha_2), \tag{1}$$

где

$$r_{1m} = \frac{m\pi}{b_1}; \quad r_{2n} = \frac{n\pi}{b_2}; \quad m = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$r'_{1m} = \sqrt{r_{1m}^2 - k^2}; \quad r'_{2n} = \sqrt{r_{2n}^2 - k^2}; \tag{2}$$

α_1, α_2 — параметры, определяемые из условий непрерывности решений на границах раздела отдельных прямоугольных областей (в наших рассуждениях они значения не имеют).

Условия непрерывности на линии $x = d$

$$H_1 = H_2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{\partial H_2}{\partial x} \tag{3}$$

приводят к двум уравнениям

$$C_{10}\cos k(d-\alpha_1)+\sum_{m=1}^{\infty}C_{1m}\cos r_{1m}y\,\mathrm{ch}\,r'_{1m}(d-\alpha_1)=$$

$$=C_{20}\cos k(d-\alpha_2)+\sum_{n=1}^{\infty}C_{2n}\cos r_{2n}y\,\mathrm{ch}\,r'_{2n}(d-\alpha_2), \qquad (4$$

$$-C_{10}k\sin k(d-\alpha_1)+\sum_{m=1}^{\infty}C_{1m}r'_{1m}y\,\mathrm{sh}\,r'_{1m}(d-\alpha_1)=$$

$$=-C_{20}k\sin k(d-\alpha_2)+\sum_{n=1}^{\infty}C_{2n}r'_{2n}\cos r_{2n}y\,\mathrm{sh}\,r'_{2n}(d-\alpha_2)=\varphi(y)\sim E_y. \qquad (5$$

Задача теперь состоит в том, чтобы из уравнений (4) и (5) получить соотношение связывающее число k с размерами двух областей. Мы получим это соотношение двумя способами.

Первый способ (метод интегрального уравнения). Рассматривая выражение (5) как разложение неизвестной функции $\varphi(y)$ в ряд Фурье по $\cos r_{1m}y$ в интервале $(0, b_1)$ и по $\cos r_{2n}y$ в интервале $(0, b_2)$, выразим коэффициенты C_{1m}, C_{2n} через $\varphi(y)$; подставляя их в выражение (4), придем (учитывая, что $b_2>b$ к однородному интегральному уравнению

$$\int_0^{b_1}\varphi(\xi)\,[P(y,\xi)+P_0]\,d\xi=0, \qquad (6$$

в котором симметричное ядро представляется выражениями

$$P(y,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{cth}\,r'_{1m}(d-\alpha_1)}{r'_{1m}b_1}\cos r_{1m}y\cos r_{1m}\xi-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{cth}\,r'_{2n}(d-\alpha_2)}{r'_{2n}b_2}\cos r_{2n}y\cos r_{2n}\xi,$$

$$P_0=\frac{\mathrm{ctg}\,k(d-\alpha_2)}{kb_2}-\frac{\mathrm{ctg}\,k(d-\alpha_1)}{kb_1}.$$

Применяя к решению (6) метод Бубнова — Галеркина (или вариационный метод Ри ца), получим искомое соотношение, которое связывает неизвестное число k с размерам двух областей:

$$\begin{vmatrix} M_{00}+P_0N_{00}, & M_{01}+P_0N_{01}\ldots & M_{0i}+P_0N_{0i}\ldots\\ M_{10}+P_0N_{10}, & M_{11}+P_0N_{11}\ldots & M_{1i}+P_0N_{1i}\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ M_{j0}+P_0N_{j0}, & M_{j1}+P_0N_{j1}\ldots & M_{ji}+P_0N_{ji}\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{vmatrix}=0$$

где

$$M_{ji}=\int_0^{b_1}\int_0^{b_1}\varphi_j(\xi)\,P(y,\xi)\,\varphi_i(y)\,d\xi\,dy;$$

$$i=0,1,2,\ldots;\ j=0,1,2,\ldots$$

$$N_{ji}=\int_0^{b_1}\int_0^{b_1}\varphi_j(\xi)\,\varphi_i(y)\,d\xi\,dy;$$

φ_j, ψ_i — аппроксимирующие функции, при помощи которых неизвестная функци $\varphi(\xi)$ представляется в виде ряда

$$\varphi(\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i\varphi_i(\xi). \qquad (6$$

Второй способ (метод неопределенных коэффициентов). В уравнениях (4), (5) введем обозначения

$$C_{10}\cos k(d-\alpha_1)=B_0,\qquad C_{20}\cos k(d-\alpha_2)=D_0,$$
$$C_{1m}\operatorname{ch} r'_{1m}(d-\alpha_1)=B_m,\qquad C_{2n}\operatorname{ch} r'_{2n}(d-\alpha_2)=D_n, \tag{11}$$

$$-C_{10}k\sin k(d-\alpha_1)=\beta_0,\qquad -C_{20}k\sin k(d-\alpha_2)=A_0,$$
$$C_{1m}r'_{1m}\operatorname{sh} r'_{1m}(d-\alpha_1)=\beta_m,\qquad C_{2n}r'_{2n}\operatorname{sh} r'_{2n}(d-\alpha_2)=A_n, \tag{12}$$

после чего эти уравнения примут вид

$$B_0+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\cos r_{1m}y=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos r_{2n}y=f(y), \tag{13}$$

$$\beta_0+\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\cos r_{1m}y=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos r_{2n}y=\varphi(y). \tag{14}$$

Согласно методу неопределенных коэффициентов необходимо коэффициенты A_n, B_m, D_n выразить через β_m.

Рассматривая A_0, A_n как коэффициенты Фурье разложения функции $\varphi(y)$ по $\cos r_{2n}(y)$ в интервале $(0, b_2)$, получим (учитывая, что $\varphi(y)$ равна нулю на отрезке b_2-b_1)

$$A_0=\frac{1}{b_2}\int_0^{b_1}\varphi(y)\,dy,\qquad A_n=\frac{2}{b_2}\int_0^{b_1}\varphi(y)\cos r_{2n}y\,dy. \tag{15}$$

Подставляя в полученные выражения вместо $\varphi(y)$ ряд (14) (в этом как раз и состоит аппроксимация неизвестной функции функциями, через которые задано поле в области с меньшим размером b), выразим коэффициенты A_n через β_m.

Коэффициенты B_j ($j=0,\ 1,\ldots$) определим из (13) через функцию $f(y)$:

$$B_0=\frac{1}{b_1}\int_0^{b_1}f(y)\,dy,\qquad B_j=\frac{2}{b_1}\int_0^{b_1}f(y)\cos r_{1j}y\,dy. \tag{16}$$

Вместо $f(y)$ подставляем сумму из (13) с коэффициентами D_n; получим

$$B_0=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin r_{2n}b_1}{r_{2n}b_1}D_n, \tag{17}$$

$$B_j=\frac{2}{b_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{2n}\sin r_{2n}b_1}{r_{2n}^2-r_{1j}^2}D_n. \tag{18}$$

Но из соотношений (11), (12), а также (15), (16) можно найти, что

$$B_0=-\frac{\operatorname{ctg}k(d-\alpha_1)}{k}\beta_0;\quad B_j=\frac{\operatorname{cth}r'_{1j}(d-\alpha_1)}{r'_{1j}}\beta_j, \tag{19}$$

$$D_0=-\frac{\operatorname{ctg}k(d-\alpha_2)}{k}A_0-\frac{b_1}{b_2}\frac{\operatorname{ctg}k(d-\alpha_2)}{k}\beta_0, \tag{20}$$

$$D_n=\frac{\operatorname{cth}r'_{2n}(d-\alpha_2)}{r'_{2n}}A_n=\frac{2}{b_2}\frac{\operatorname{cth}r'_{2n}(d-\alpha_2)}{r'_{2n}}\frac{\sin r_{2n}b_1}{r_{2n}}\beta_0+$$
$$+\frac{2}{b_2}\frac{\operatorname{cth}r'_{2n}(d-\alpha_2)}{r'_{2n}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_{2n}\sin r_{2n}b_1}{r_{2n}^2-r_{1m}^2}\beta_m. \tag{21}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов B, D в выражения (17), (18), получим (при переменном i) систему линейных относительно β однородных уравнений

$$\sum_{j=0}^{\infty} L_{ji}\beta_i = 0; \quad i = 0, \ 1, \ 2, \ldots, \tag{22}$$

где L_{ji} — коэффициенты при β_i — определяются по следующим соотношениям:

$$L_{ji} = \frac{b_1}{2}\frac{\operatorname{cth} r'_{1j}(d-\alpha_1)}{r'_{1j}} - \frac{2}{b_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth} r'_{2n}(d-\alpha_2)(r_{2n}\sin r_{2n}b_1)^2}{r'_{2n}(r_{2n}^2 - r_{1j}^2)(r_{2n}^2 - r_{1j}^2)}; \quad j \neq 0; \quad i \neq 0,$$

$$L_{j0} = -\frac{2}{b_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth} r'_{2n}(d-\alpha_2)}{r'_{2n}}\frac{\sin r_{2n}b_1}{(r_{2n}^2 - r_{1j}^2)}; \quad j \neq 0; \quad i = 0,$$

$$L_{0i} = -\frac{2}{b_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth} r'_{2n}(d-\alpha_2)}{r'_{2n}}\frac{(\sin r_{2n}b_1)^2}{r_{2n}^2 - r_{1i}^2}; \quad j = 0, \quad i \neq 0,$$

$$L_{00} = \frac{b_1}{b_2}\frac{\operatorname{ctg} k(d-\alpha_2)}{k} - \frac{\operatorname{ctg} k(d-\alpha_1)}{k} - 2\frac{b_1}{b_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth} r'_{2n}(d-\alpha_2)}{r'_{2n}}\left(\frac{\sin r_{2n}b_1}{r_{2n}b_1}\right)^2;$$

$$j = i = 0.$$

Записывая условия нетривиального решения системы (22), получим искомое уравнение, связывающее неизвестную величину k с размерами двух прямоугольных областей:

$$\begin{vmatrix} L_{00}, & L_{01}, & \ldots & L_{0i}\ldots \\ L_{10}, & L_{11}, & \ldots & L_{1i}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{j0}, & L_{j1}, & \ldots & L_{ji}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Таким образом, мы получили различными способами два уравнения (8) и (23), представляющие собой решение одной и той же задачи. Покажем теперь, что уравнение (23) получается из уравнения (8), если в качестве аппроксимирующих функций выбрать функции, описывающие поле в прямоугольной области с меньшей высотой b, т. е. если неизвестная функция представлена рядом

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i \cos r_{1i}\xi,$$

где $r_{1j} = i\frac{\pi}{b_1}$; $i = 0, 1, \ldots$. При указанном представлении $\varphi(\xi)$ все значения N_{ji}, кроме N_{00}, равны нулю. Вычисление интегралов (9) приводит к следующему результату:

$$M_{ji} + P_0 N_{ji} = \frac{b_1}{2}\frac{\operatorname{cth} r'_{1j}(d-\alpha_1)}{r'_{1j}} - \frac{2}{b_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth} r'_{2n}(d-\alpha_2)(r_{2n}\sin r_{2n}b_1)^2}{r'_{2n}(r_{2n}^2 - r_{1j}^2)(r_{2n}^2 - r_{1i}^2)} = L_{ji},$$

$$M_{j0} + P_0 N_{j0} = L_{j0},$$

$$M_{0i} + P_0 N_{0i} = L_{0i},$$

$$M_{00} + P_0 N_{00} = L_{00},$$

что и доказывает выдвинутое выше предположение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Головин, Распространение низших волн в некоторых однородных и неоднородных волноводах, Диссертация, МЗИС, 1950.
2. Н. Ф. Фунтова, О приближенных методах расчета критических частот волноводов, Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, 1954, 88, 67.

3. В. М. Седых, Исследование волноводов крестообразной и *Н*-образной форм поперечного сечения, Диссертация, Харьковский государственный университет, 1959.
4. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГТИ, 1952.
5. Л. Н. Дерюгин, Расчет критической частоты *П*- и *Н*-волноводов, Радиотехника, 1948, 3, 6.
6. А. Я. Яшкин, Об одном методе расчета прямых и изогнутых волноводов сложного сечения в системах, допускающих разделение переменных, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 5, 754.

Поступило в редакцию
24 II 1961

РЕГУЛИРУЕМЫЙ НАПРАВЛЕННЫЙ ОТВЕТВИТЕЛЬ С ПОСТОЯННЫМ СДВИГОМ ФАЗЫ

М. Я. Мандельштам

ВВЕДЕНИЕ

В технике СВЧ используются регулируемые направленные ответвители на щелевых мостах [1, 2]. Отличительной особенностью принципиальной схемы такого ответвителя (рис. 1) является наличие регулировки электрической длины одного из двух волноводов, соединяющих щелевые мосты. Регулировка позволяет в широких пределах изменять переходное затухание направленного ответвителя. Однако одновременно с изменением переходного затухания меняется и сдвиг фазы волны, проходящей через направленный ответвитель.

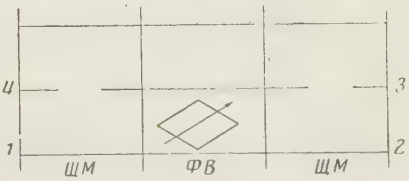


Рис. 1. Принципиальная схема регулируемого направленного ответвителя с одним фазовращателем:
ЩМ — щелевой мост; *ФВ* — фазовращатель

Во многих случаях полезно иметь регулировку переходного затухания, свободную от «паразитного» сдвига фазы. Так, например, настройку кольцевого резонатора на оптимальный режим работы [3] удобнее осуществлять, если изменение переходного затухания не влияет на электрическую длину кольца. Устройство, позволяющее регулировать амплитуду поля СВЧ без воздействия на фазу, представляет интерес при фазовых измерениях.

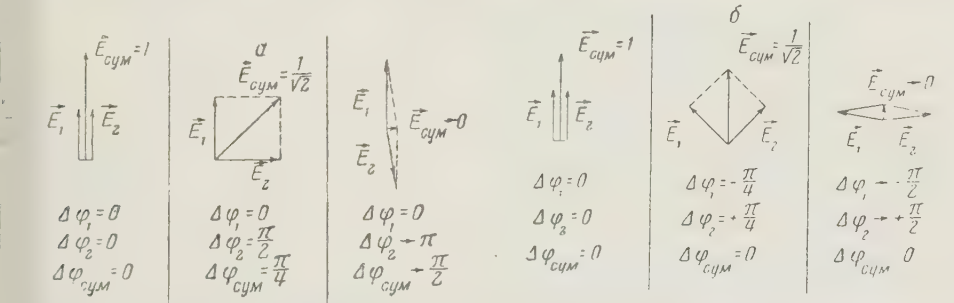


Рис. 2. Векторные диаграммы регулируемых направленных ответвителей:
а — с одним фазовращателем; *б* — с двумя фазовращателями

Дополнительный сдвиг фазы можно устранить, если одновременно изменять длину обоих волноводов, соединяющих щелевые мосты, так, чтобы эти изменения были одинаковыми по абсолютной величине, но противоположными по направлению:

$$\Delta\varphi_1 = -\Delta\varphi_2, \qquad (1)$$

где $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ — приращения электрических длин первого и второго волноводов, соединяющих щелевые мосты.

Сказанное можно пояснить векторными диаграммами, приведенными на рис. 2. На этих диаграммах $\vec{E}_1$ соответствует волне, прошедшей по первому волноводу, со единяющему щелевые мосты; $\vec{E}_2$ — волне, прошедшей по второму волноводу; $\vec{E}_{сум} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ — суммарная напряженность в определенном сечении выходного плеч направленного ответвителя (например, в плече *2* или *3*, рис. 1). Нулевая фаза соответствует ориентации вектора $\vec{E}_{сум}$ при синфазности векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$; $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, $\Delta\varphi_{сум}$ — соответственно фазовые сдвиги векторов $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_{сум}$ относительно нулевой фазы.

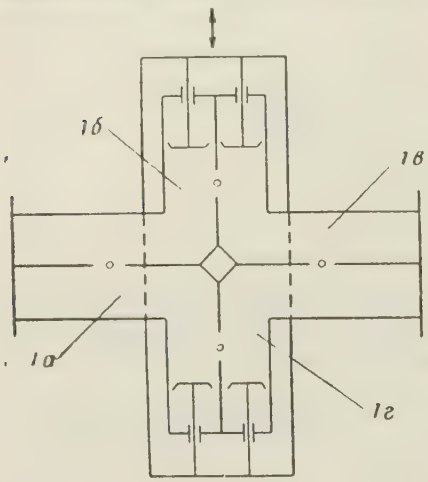


Рис. 3. Принципиальная схема регулируемого направленного ответвителя с двумя жестко связанными поршневыми фазовращателями

Рассмотрение диаграмм, приведенных на рис. 2, позволяет сделать следующие выводы.

1. Если регулировка переходного затухания осуществляется путем изменения электрической длины одного из двух волноводов, соединяющих щелевые мосты (обычный направленный ответвитель, рис. 1), то при изменении переходного затухания от нуля до бесконечности фаза выходящей волны изменяется на $\pi/2$.

2. Если регулировка переходного затухания осуществляется путем одновременных, одинаковых по величине, но противоположных по направлению, изменений электрической длины обоих волноводов, соединяющих щелевые мосты, то фаза выходящей волны при такой регулировке не изменяется.

1. РЕГУЛИРУЕМЫЙ НАПРАВЛЕННЫЙ ОТВЕТВИТЕЛЬ С ПОРШНЕВЫМИ ФАЗОВРАЩАТЕЛЯМИ

Как известно [1], поршневой фазовращатель дает сдвиг фазы проходящей волны прямо пропорциональный перемещению блока поршней:

$$\Delta\varphi = 4\pi \frac{\Delta x}{\lambda_g},$$

где $\Delta\varphi$ — сдвиг фазы; Δx — изменение координаты, определяющей положение блока поршней; λ_g — длина волны в волноводе.

Это обстоятельство позволяет очень просто осуществить регулируемый направленный ответвитель с постоянным сдвигом фазы (рис. 3). Все поршни в этом устройстве жестко связаны друг с другом. Приближение верхней пары поршней к щелевому мосту *1б* вызывает отход нижней пары поршней от щелевого моста *1г*. При этом электрическая длина верхнего волновода, соединяющего щелевые мосты *1а* и *1е*, уменьшается на некоторую величину, а электрическая длина нижнего волновода возрастает на точно такую же величину, и, таким образом, выполняется условие постоянства сдвига фазы суммарной, выходящей волны.

2. РЕГУЛИРУЕМЫЙ НАПРАВЛЕННЫЙ ОТВЕТВИТЕЛЬ С ФЕРРИТОВЫМИ ФАЗОВРАЩАТЕЛЯМИ

Аналогичное устройство, очевидно, может быть осуществлено при помощи ферритовых фазовращателей

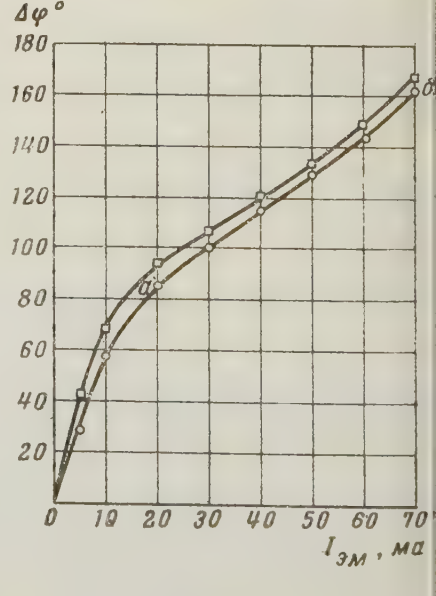


Рис. 4. Зависимости фазового сдвига от тока в намагничивающей катушке для двух ферритовых фазовращателей

В разработанной конструкции использованы в качестве фазовращателей прямоугольные волноводы, частично заполненные ферритом, помещенным в поперечное магнитное поле электромагнита.

На рис. 4 представлена полученная на опыте зависимость сдвига фазы от тока в намагничивающей катушке. Рассмотрение рис. 4 показывает, что в довольно большой области (между точками *а* и *б*) сдвиг фазы практически прямо пропорционален намагничивающему току. Аналогичные данные приведены в литературе [4, 5].

Как видно из диаграммы рис. 2, *б*, для изменения переходного затухания в пределах от 0 до ∞, при условии постоянства сдвига фазы, необходимо равномерно изменять электрическую длину одного из волноводов, соединяющих щелевые мосты, от 0 до $+\pi/2$,

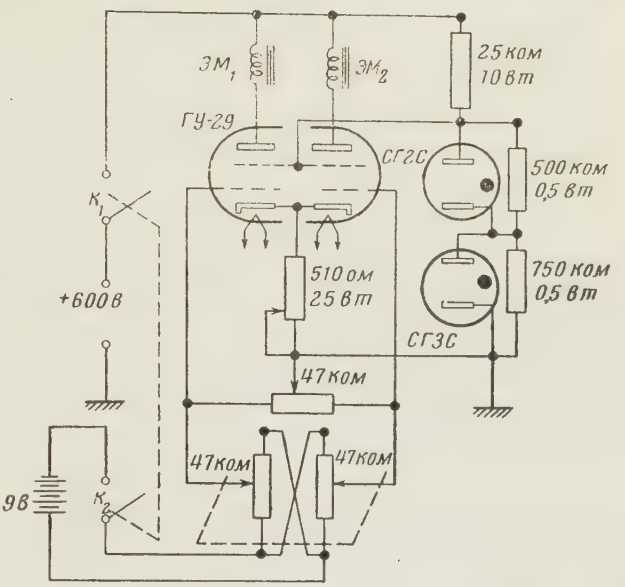


Рис. 5. Принципиальная электрическая схема питания электромагнитов ферритовых фазовращателей

а второго — от 0 до $-\pi/2$. Это требование можно выполнить, одновременно и равномерно двигаясь по характеристике одного из фазовращателей от точки *а* к точке *б*, а по характеристике второго фазовращателя — от точки *б* к точке *а*.

На рис. 5 приведена простая электрическая схема, позволяющая осуществить указанную регулировку фазовых сдвигов. При увеличении напряжения на управ-

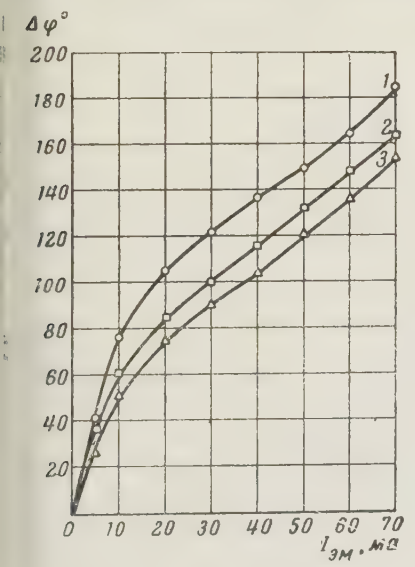


Рис. 6

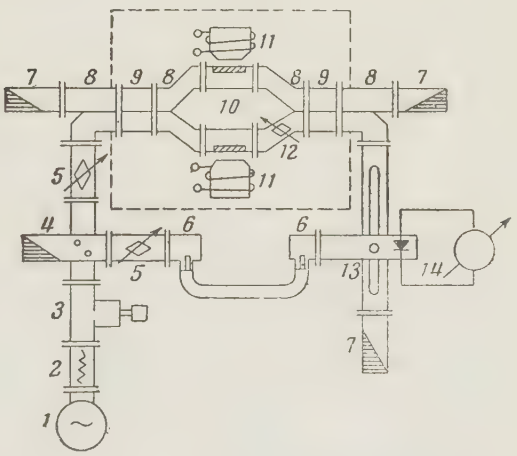


Рис. 7

Рис. 6. Зависимости фазового сдвига от тока в намагничивающей катушке при различных длинах волн:

1 — $\lambda = 0{,}97\ \lambda_0$; *2* — $\lambda = \lambda_0$; *3* — $\lambda = 1{,}03\ \lambda_0$.

Рис. 7. Блок-схема экспериментальной установки:

1 — генератор; *2* — ферритовый вентиль; *3* — волномер; *4* — направленный ответвитель; *5* — аттенюатор; *6* — коаксиально-волноводный переход; *7* — поглотитель; *8* — переход от одиночного волновода к сдвоенному; *9* — щелевой мост; *10* — ферритовый фазовращатель; *11* — электромагниты; *12* — фиксированный фазовращатель; *13* — измерительная линия — фазометр; *14* — микроперметр (пунктиром обведены элементы, входящие в регулируемый направленный ответвитель с постоянным сдвигом фазы)

ляющей сетке левого тетрода на некоторую величину напряжение на сетке правого тетрода уменьшается на эту величину. Соответственно изменяются и анодные токи, протекающие через намагничивающие катушки ($ЭМ_1$ и $ЭМ_2$) электромагнитов. Разница в характеристиках правого и левого тетродов может быть использована для компенсации разности характеристик фазовращателей. Применение тетродов уменьшает требуемую стабильность источника анодного напряжения.

Измерения, проведенные в диапазоне $\Delta\lambda/\lambda = \pm 3\%$, показали, что наклон участка кривой зависимости фазового сдвига от намагничивающего тока между точками *а* и *б* практически не зависит от длины волны (рис. 6), что позволяет использовать регулируемый направленный ответвитель в указанном диапазоне длин волн.

Экспериментальная проверка, проведенная на лабораторном макете (рис. 7), показала, что в диапазоне длин волн $\Delta\lambda/\lambda = \pm 3\%$ фазовый сдвиг при изменении переходного затухания от 1 до 15—20 *дб* остается постоянным с точностью до $\pm 2{,}5°$. В то же время при регулировке переходного затухания при помощи одного из фазовращателей (при выключенном втором фазовращателе) наблюдается сдвиг фазы выходной волны на $\sim 90°$ (см. диаграмму рис. 2, *а*).

Интересной особенностью рассматриваемого устройства является неизменность дифференциального сдвига фазы * при регулировке переходного затухания. При выбранных размерах ферритовых пластин дифференциальный сдвиг фазы был близок к 180° и при изменении переходного затухания в прямом направлении в пределах от 1 до 15—20 *дб* изменялся не более чем на $\pm 2\%$.

Таким образом, рассматриваемое устройство имеет свойства не только регулируемого направленного ответвителя, но и гиратора [6]. Это качество ответвителя можно использовать, в частности, для подавления обратных волн в кольцевом резонаторе бегущей волны [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Milosevic, R. Vautey, Le Vide, 1956, **65**, 410.
2. W. L. Teeter, K. R. Bushore, IRE Trans., 1957, **MTT-5**, 227.
3. В. Е. Голант, М. Я. Мандельштам, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 4, 660.
4. R. F. Soohoo, IRE Convention Record, 1956, pt 5, 84—98.
5. M. L. Kales, H. N. Chait, N. G. Sakiotis, J. Appl. Phys., 1953, **24**, 816.
6. А. Д. Фокс, С. Е. Миллер, М. Т. Вейс, Свойства ферритов и их применение в диапазоне СВЧ, Изд. Советское радио, 1956.
7. K. Tomiyasu, IRE Trans., 1957, **MTT-5**, 267.

Поступило в редакцию
3 V 1961

«ВОЗМУЩЕНИЕ» РЕЗОНАТОРА НА ВОЛНУ H_{01n} ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ СТЕРЖНЕМ

Е. Б. Зальцман, В. Е. Пояркова

Во многих случаях измерений на СВЧ бывают необходимы узкополосные (высокодобротные) системы, перестраиваемые по частоте с высокой степенью разрешения. Обычно такая система представляет собой электромагнитный резонатор на волну H_{01n} (так как это самый добротный тип колебаний), перестраиваемый по частоте при помощи поршня. Очевидно, что разрешающая способность (перемещение поршня на единицу частоты) при этом невелика.

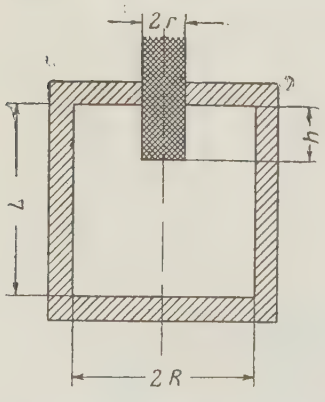


Рис. 1. Сечение резонатора с цилиндрическим стержнем

Сравнительно давно описаны резонаторы на волну H_{01n} с перестройкой при помощи цилиндрического стержня, вводимого через торцовую стенку, имеющие высокую разрешающую способность (так называемые волномеры полукоаксиального типа [1]). Однако расчет резонаторов такого типа отсутствовал.

Для расчета изменения резонансной частоты резонатора при введении через торцовую стенку цилиндрического стержня (см. рис. 1) используется известная формула возмущения электромагнитного резонатора (см., например, [2], формула (П.26)

* Дифференциальный сдвиг фазы — разность сдвигов фазы для двух направлений распространения.

Подставляя в эту формулу известные выражения для электрических и магнитных полей волны H_{01} [2] и интегрируя в цилиндрической системе координат, можно получить следующую формулу для частотной расстройки резонатора:

$$\frac{f-f_0}{f_0}=\frac{\gamma}{4\pi n J_0^2(\xi_{01})}\left(\frac{r}{R}\right)^2\left\{x(\beta_2-\beta_1)+\sin x\left[\left(\frac{2}{\gamma}-1\right)\beta_1-\beta_2\right]\right\}, \qquad (1)$$

где f_0 — резонансная частота невозмущенного резонатора; f — то же при введенном стержне;

$$\gamma=\left(\frac{\xi_{01}}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\lambda}{R}\right)^2;$$

$$x=4\pi\frac{h}{\lambda_в};\quad \beta_1=J_0^2(y)+J_1^2(y)-\frac{2}{y}J_1(y)J_0(y);$$

$$\beta_2=J_0^2(y)+J_1^2(y);\quad y=\xi_{01}\frac{r}{R};$$

J_0, J_1 — бесселевы функции 1-го рода нулевого и первого порядков; ξ_{01} — первый корень функции $J_1(y)$, $\xi_{01}=3{,}8317$; λ — длина волны TEM, соответствующая частоте f_0. Смысл величин r, R, h и L ясен из рис. 1. Подразумевается, что $L=n\frac{\lambda_в}{2}$, где $\lambda_в$ — длина периодичности вдоль оси резонатора; n—число полуволн вдоль оси резонатора.

Из (1) следует, что частотная расстройка является функцией трех безразмерных параметров: r/R, $h/\lambda_в$ и λ/R. Семейство кривых, рассчитанных по формуле (1) при фиксированном значении $\lambda/R=1$, представлено на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что кривая частотной расстройки имеет нелинейный характер и лишь приближенно может быть аппроксимирована линейными участками. Нетрудно видеть, что крутые линейные участки располагаются вблизи точек $h/\lambda_в=0{,}25$; 0,75;..., а пологие участки — вблизи точек $h/\lambda_в=0{,}5$; 1; .... Физический смысл этого очевиден. На оси резонатора на волну H_{01n} не равна нулю только одна продольная составляющая поля — H_z, которая распределена вдоль оси по закону синуса. При движении конца стержня через область пучности H_z ($h/\lambda_в=0{,}25$;...) происходит быстрое изменение энергии в объеме, вытесняемом стержнем, а на кривой частотной расстройки при этом имеют место крутые участки; пологие участки получаются при движении конца стержня через минимумы поля H_z ($h/\lambda_в=0{,}5$; ...).

Можно показать, что все эти точки будут точками перегиба кривой частотной расстройки. Можно также показать, что если аппроксимировать крутой участок этой кривой вокруг точки $h/\lambda_в=0{,}25$ прямой, касательной к ней в точке перегиба, то нелинейность будет весьма малой, если ширина участка $\Delta h/\lambda_в$ меньше 0,2 (рис. 2), и поэтому целесообразно использовать для перестройки резонатора на волну H_{01n} по частоте именно этот участок.

Продифференцировав (1) в точке $x=\pi$ ($h/\lambda_в=0{,}25$), получим уравнение касательной для этого участка в виде

$$\Delta f=\frac{f_0}{L}G\Delta h, \qquad (2)$$

где

$$G=\frac{1}{J_0^2(\xi_{01})}\left(\frac{r}{R}\right)^2(\gamma\beta_2-\beta_1);$$

L — резонансная длина невозмущенного резонатора; f_0 — частота резонатора при стержне, введенном на четверть длины волны.

Формула (2) позволяет определить полосу перестройки при заданных размерах стержня и обратно: при заданной полосе — размеры стержня. Формула (2) позволяет также вычислить размеры стержня при заданной разрешающей способности на линейном участке. Ряд значений G приведен в табл. 1.

Таблица 1

r/R	$\lambda_в/r$				
	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
0,05	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,10	0,017	0,021	0,026	0,031	0,037
0,15	0,033	0,042	0,052	0,063	0,075
0,20	0,048	0,063	0,080	0,098	0,017

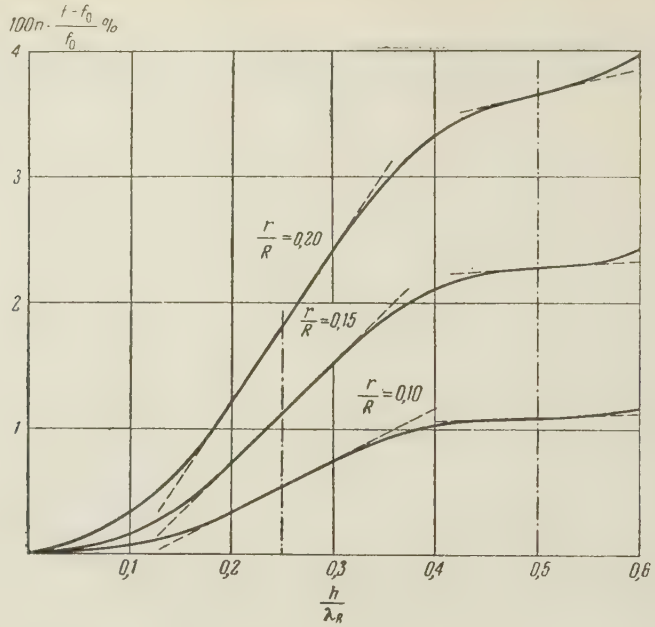


Рис. 2. Частотная расстройка резонатора на волну H_{01n} в зависимости от относительного погружения стержня

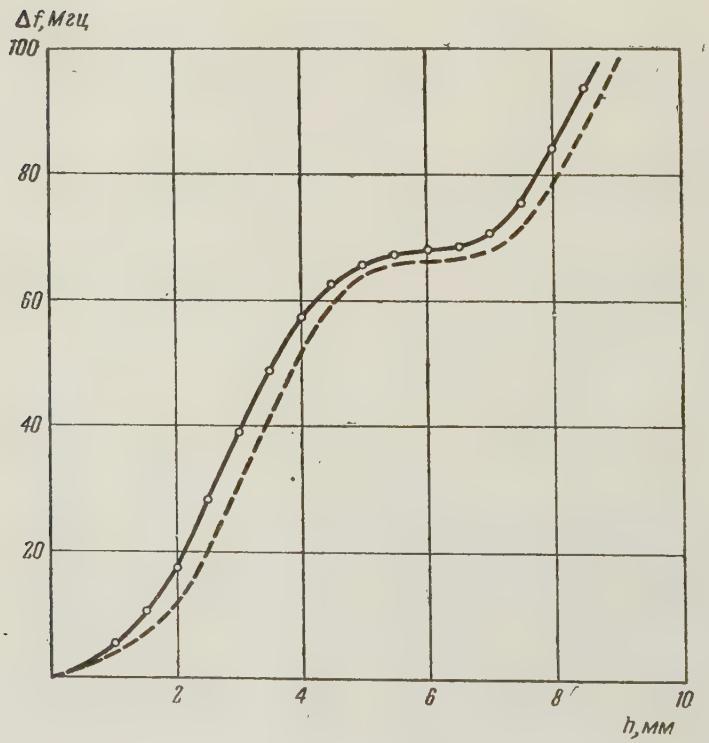


Рис. 3. Градуировочная кривая волномера для диапазона волн 8 *мм*, $r/R = 0{,}08$ (сплошная кривая — экспериментальная; пунктирная кривая — рассчитанная по формуле (1))

Экспериментальная проверка полученных расчетных формул чрезвычайно проста. При переменном погружении стержня внутрь резонатора производится градуировка по частоте, и градуировочная кривая сравнивается с теоретической кривой. Результаты такого сравнения, проделанные для резонатора (волномера) диапазона волн 8 *мм*, представлены на рис. 3. Конструкция волномера описана в [3]. Из рис. 3 видно, что экспериментальная и теоретическая кривые очень близки, за исключением того, что экспериментальная кривая смещена в сторону меньших погружений стержня. Для этого волномера отношение $r/R = 0{,}08$.

При бо́льших значениях r/R расхождение экспериментальной и теоретической кривых становится более значительным, однако наклон экспериментальной кривой на линейном участке (величина, обратная разрешающей способности, или плотность настройки) хорошо согласуется со значением плотности настройки, рассчитанным по формуле (2). Результаты сравнения рассчитанной и измеренной плотностей настройки различных исследованных волномеров сведены в табл. 2.

Таблица 2

r/R	$\Delta f/\Delta h$, *Мгц/мм*		Погрешность, %
	рассчитано	измерено	
0,08	21,04	21,2	0,7
0,16	4,29	4,40	2,5
0,19	179	185 [1]	3,3

В первой строке табл. 2 приведены результаты для волномера диапазона волн 8 *мм* [3], во второй строке — результаты для волномера диапазона волн 3 *см*. В обоих волномерах вдоль длины невозмущенного резонатора укладывалось 5 полуволн ($n = 5$). В третьей строке приведены результаты для волномера диапазона волн 1 *см*, описанного в [1]. Большее значение плотности настройки этого волномера по сравнению с двумя первыми волномерами объясняется малым значением n ($n = 1$).

Данные табл. 2 доказывают справедливость формулы (2) для плотности настройки на линейном участке. Из табл. 2 можно также заметить, что погрешность расчета растет пропорционально квадрату отношения радиусов $(r/R)^2$.

Приведенные результаты показывают применимость полученных простым способом формулы (1) для оценки частотного диапазона волномера со стержнем и формулы (2) для надежного расчета разрешающей способности на линейном участке кривой частотной расстройки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Техника измерений на сантиметровых волнах, перев. с англ., Изд. Советское радио, 1949, ч. 1, стр. 120.
2. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, Изд. Советское радио, 1952, стр. 98.
3. Г. Д. Бурдун, Е. Б. Зальцман, В. Е. Пояркова, Установка для измерения диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь в 8-*мм* диапазоне волн, Сб. «100 лет со дня рождения А. С. Попова», Изд. АН СССР, 1960.

Поступило в редакцию
28 X 1960

КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗИ ДЛЯ ИЗОГНУТОГО КОАКСИАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

О. Е. Шушпанов

При прохождении волны H_{01} через изгиб круглого волновода часть энергии этой волны переходит в энергию других волн. Особенно сильно перекачивается энергия волны H_{01} в энергию волны E_{11}. Для уменьшения связанности волн H_{01} и E_{11} на изгибе волновода можно ввести импедансный внутренний провод, снимающий вырождение. В коаксиальной системе, получаемой при этом, существуют кабельная электромагнитная волна и волноводные волны. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда на изгибе волновода введен идеальный проводник. В статье [1] получена система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая поле на изгибе волновода. Коэффициенты этой системы характеризуют связь между волной, падающей на изгиб, и волнами, возникающими на изгибе. Эти коэффициенты называются коэффициентами связи. Ниже выведены формулы для коэффициентов связи волны H_{01} и поперечной волны с другими волнами в коаксиальном волноводе.

Рассмотрим изгиб коаксиального волновода круглого сечения с идеально проводящими стенками. Пусть a — радиус внешнего, а b — радиус внутреннего цилиндров. В таком волноводе, так же как и в круглом волноводе без осевого проводника, существуют E- и H-волны. Обозначим через E_{mn} ту из E-волн рассматриваемого коаксиаль-

ного волновода, которая при $b \to 0$ переходит в волну E_{mn} волновода радиуса a без внутреннего провода. Аналогично вводим волну H_{mn}.

Волна H_{01} связана только с волнами E_{11} и H_{1n}; волны H_{01} и E_{11} остаются вырожденными и в коаксиальной системе.

Коэффициент связи волн H_{01} и E_{11}, так же как и в волноводе без осевого проводника, имеет вид

$$F = \frac{ika}{\sqrt{2}\mu}. \tag{1}$$

Для коаксиального волновода μ является первым корнем уравнения

$$J_1(\mu)\, N_1\left(\frac{b}{a}\,\mu\right) - J_1\left(\frac{b}{a}\,\mu\right) N_1(\mu) = 0. \tag{2}$$

Для волновода без внутреннего провода μ — первый корень уравнения $J_1(\mu) = 0$, т. е. $\mu = 3{,}83$. Так, например, при $n = 0{,}5$ коэффициент связи (1) волны H_{01} с волной E_{11} для изгиба коаксиального волновода в 1,7 раза меньше, чем для изгиба волновода без осевого проводника.

Коэффициент связи волны H_{01} с волной H_{1n} имеет вид

$$F = \frac{i(h_1 + h_n)^2 g_1 g_n^2}{\sqrt{2}(g_1^2 - g_n^2)^2 h_1} \frac{1}{\sqrt{N_1^2(g_1 b) - N_1^2(g_1 a)}} \times$$
$$\times \frac{aN_1(g_1 a)\, N_1'(g_n a) - bN_1(g_1 b)\, N_1'(g_n b)}{\sqrt{N_1'^2(g_n b)\, b^2 (g_n^2 a^2 - 1) - N_1'^2(g_n a)\, a^2 (g_n^2 b^2 - 1)}}, \tag{3}$$

где g_1, h_1 и g_n, h_n — соответственно волновые числа для H_{01}- и H_{1n}-волн, причем $g_1 = \mu_1/a$; μ_1 — первый корень уравнения (2); g_n — n-й корень уравнения

$$J_1'(g_k a)\, N_1'(g_k b) - J_1'(g_k b)\, N_1'(g_k a) = 0. \tag{4}$$

В предельном случае, когда радиус внутреннего провода стремится к нулю, и формулы (3) получаем коэффициент связи волн H_{01} и H_{1n} в волноводе без осевого проводника [2].

Поперечная (кабельная) волна на изгибе связывается только с волнами H_{1m} и E_{1n}. Коэффициенты связи имеют соответственно вид

$$F = -\frac{ik(h_m + k)}{2h_m g_m^2} \frac{b^2 N_1'(g_m b) - a^2 N_1'(g_m a)}{ab\sqrt{\ln\frac{a}{b}}} \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{N_1'^2(g_m b)\, b^2 (g_m^2 a^2 - 1) - N_1'^2(g_m a)\, a^2 (g_m^2 b^2 - 1)}}, \tag{5}$$

$$F = \frac{i2k(h_n + k)}{h_n g_n^2} \frac{aN_1(g_n a) - bN_1(g_n b)}{ab\sqrt{\ln\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{N_1^2(g_n b) - N_1^2(g_n a)}}, \tag{6}$$

где g_m — m-й корень уравнения (4); $g_n = \mu_n/a$; μ_n — n-й корень уравнения (2). В предельном случае, когда $b \to 0$, выражения (5) и (6) стремятся к нулю.

Автор благодарен Б. З. Каценеленбауму за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, Изогнутые волноводы с неоднородным заполнением. Радиотехника и электроника, 1958, 3, 5, 634.
2. Н. П. Керженцева, О распространении электромагнитных волн в изогнутых волноводах круглого сечения, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 5, 649.

Поступило в редакцию
15 III 1961

ВТОРИЧНАЯ И ФОТОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ ПРИ АДСОРБЦИИ БЕРИЛЛИЯ И СЕРЕБРА НА БАРИИ *

И. М. Бронштейн, Б. С. Фрайман

1. Известно, что при адсорбции атомов щелочных и щелочноземельных металлов на металлических мишенях работа выхода φ последних уменьшается, а коэффициент вторичной электронной эмиссии σ — возрастает. В частности, в [1] показано, что при адсорбции Ba на Mo максимальные значения σ и фотоэлектронной эмиссии зависят от степени покрытия и соответствуют одной и той же ее величине.

Обычно уменьшение работы выхода при адсорбции атомов электроположительных металлов на электроотрицательных объясняют образованием двойного электрического слоя, обращенного своей положительной стороной наружу. Следовательно, адсорбция атомов электроотрицательных металлов на электроположительных металлах должна была бы привести к росту работы выхода, так как в этом случае двойной электрический слой на поверхности будет обращен своей отрицательной стороной наружу. Однако приводимые ниже данные измерений фотоэлектронного тока и σ при адсорбции атомов Be и Ag на поверхности бария показывают, что это не так: работа выхода при этом не только не возрастает, а наоборот — при оптимальной степени покрытия — уменьшается.

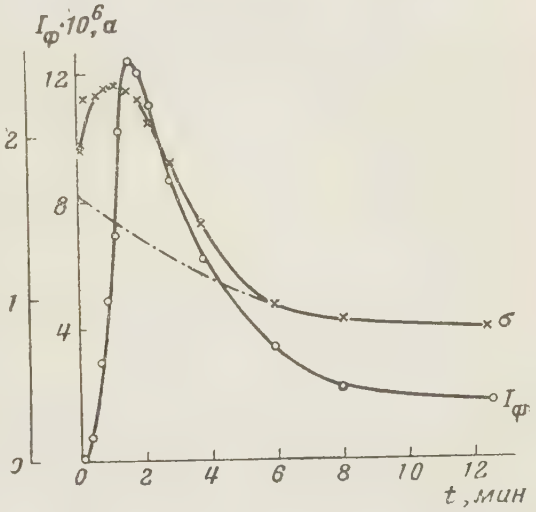


Рис. 1

2. Прибор, техника и методика измерений описаны в [2, 3]. Измерения коэффициента вторичной электронной эмиссии σ при адсорбции Ba на поверхности серебра приводились в вакууме $5 \cdot 10^{-8}$ и $4 \cdot 10^{-9}$ *мм* рт. ст. При этом значения σ для Ba и Ag, а также ход толщинных зависимостей $\sigma(d)$ в пределах погрешностей опыта не зависели от вакуумных условий [3]. Фототок измерялся при освещении светом раскаленной вольфрамовой спирали.

На рис. 1 представлены кривые $\sigma(t)$ и $I_\Phi(t)$ при адсорбции Ba на Ag. Если бы φ_{Ba} была бы равна φ_{Ag}, то коэффициент вторичной электронной эмиссии σ монотонно умень-

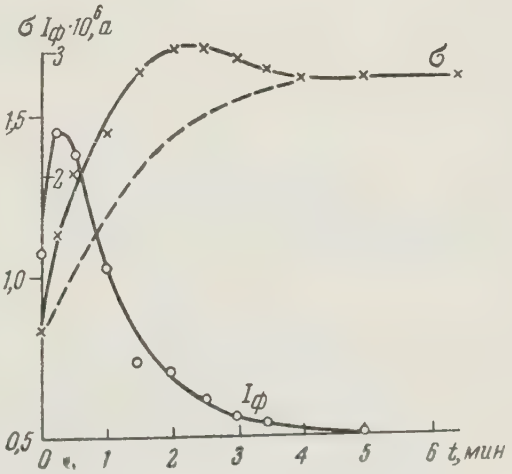


Рис. 2

Рис. 1. Кривые зависимости фототока $I_\Phi(t)$ и коэффициента вторичной электронной эмиссии $\sigma(t)$ от времени напыления слоя Ba на Ag. Пунктирной кривой (здесь и на других рисунках) показан возможный ход $\sigma(t)$ при равенстве работ выхода слоя и подложки. $E_p = 800$ *эв*

Рис. 2. Кривые зависимости фототока $I_\Phi(t)$ и коэффициента вторичной электронной эмиссии $\sigma(t)$ при адсорбции атомов Ag на Ba. $E_p = 800$ *эв*

шался бы от σ_{Ag} до σ_{Ba} (пунктирная кривая). На самом деле уже при адсорбции примерно половины монослоя Ba работа выхода значительно уменьшается, а σ достигает максимума и возрастает приблизительно на 40%. При дальнейшем возрастании степени покрытия поверхности адатомами бария, несмотря на уменьшение φ, σ умень-

* Доложено на Междуведомственном семинаре по катодной электронике 6 II 1961 г.

шается, что объясняется меньшими эффективностями прямого и обратного электронных потоков в Ba, чем в Ag. Эффект уменьшения σ, обусловленный меньшими эффективностями электронов в Ba, чем в Ag, таким образом, преобладает над эффектом возрастания σ, обусловленным дальнейшим уменьшением φ.

На рис. 2 приведены кривые $\sigma(t)$ и $I_\Phi(t)$ при адсорбции Ag на Ba. Как видно, и в этом случае приблизительно при монослое Ag на Ba имеют место заметное уменьшение работы выхода и рост фототока примерно в 1,5 раза. Благодаря этому и $\sigma(t)$ растет не монотонно, а переходит через максимум. Максимумы кривых $\sigma(t)$ и $I_\Phi(t)$ значительно сдвинуты вследствие того, что в серебре эффективности прямого и обратного потоков электронов значительно больше, чем в Ba. Поэтому, несмотря на резкое уменьшение фототока (возрастание работы выхода), рост σ все еще продолжается.

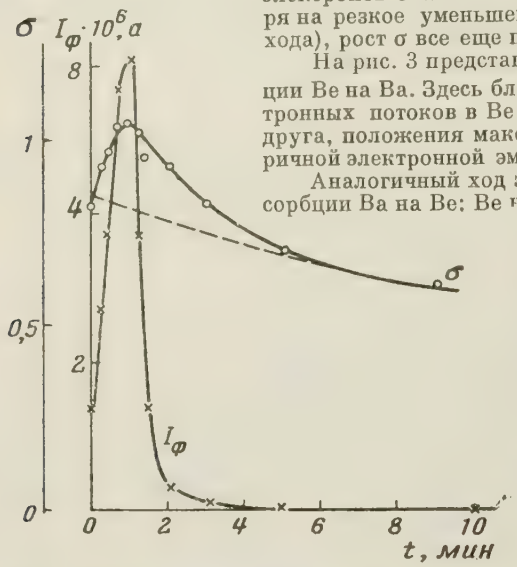


Рис. 3. Кривые зависимости фототока $I_\Phi(t)$ и коэффициента вторичной электронной эмиссии $\sigma(t)$ при адсорбции атомов Be на Ba. $E_p = 500$ эв

На рис. 3 представлены кривые $\sigma(t)$ и $I_\Phi(t)$ при адсорбции Be на Ba. Здесь благодаря тому, что эффективности электронных потоков в Be и Ba не намного отличаются друг от друга, положения максимумов фототока и коэффициента вторичной электронной эмиссии σ совпадают.

Аналогичный ход зависимости $\sigma(t)$ наблюдается при адсорбции Ba на Be; Be на Ca, Ti на Ba и Ca и Ba и Ca на Ti.

3. Из изложенных результатов видно, что работа выхода подложки может уменьшаться не только при адсорбции атомов электроположительных металлов, но и при адсорбции атомов электроотрицательных металлов. Очевидно, что объяснить этот эффект образованием двойного электрического слоя на поверхности металла нельзя. Нам кажется, что уменьшение работы выхода при адсорбции атомов электроотрицательных металлов объясняется полем пятен, существующим над пятнистой поверхностью. При этом изменение работы выхода должно проявляться тем резче, чем больше разность работ выхода адсорбированного металла и металла подложки. В случае Be $\varphi_{Be} \simeq 2\varphi_{Ba}$ [4] и I_Φ возрастает в пять раз, в то время как в случае адсорбции серебра — только в 1,5 раза. По мере роста размеров однородной поверхности поле пятен над ней будет ослабевать. Это хорошо видно при адсорбции Be на Ba; в этом случае фототок резко уменьшается уже примерно при полутораатомном слое Be.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. de Boer, H. Bruining, Physica, 1939, 6, 941.
2. И. М. Бронштейн, Р. Б. Сегаль, Физика твердого тела, 1959, 1, 10, 148.
3. И. М. Бронштейн, Б. С. Фрайман, Докл. АН СССР, 1960, 135, 5, 190.
4. А. П. Комар, В. П. Савченко, В. Н. Шредник, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 8, 1211.

Поступило в редакцию
4 II 1961

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ИМПУЛЬСОВ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В. Н. Яковлев

Известно [1], что ламповые регенеративные генераторы позволяют получать импульсы наносекундной длительности с частотой повторения в несколько десятков мегагерц. Однако из-за пренебрежимо малого коэффициента использования напряжения источника питания эти генераторы не находят широкого практического применения.

Исследования показывают, что полупроводниковые генераторы с запаздывающей обратной связью, в отличие от ламповых, могут широко применяться при получении импульсов колокольной формы длительностью меньше 0,1 *мксек* и с высокостабил

ной частотой повторения в несколько *мегагерц*. Амплитуда импульсов при этом может составлять 50—75% напряжения источника питания.

Принцип построения полупроводниковых генераторов с запаздывающей обратной связью по существу ничем не отличается от принципа построения ламповых генераторов. Эти генераторы, как известно [1, 2], состоят из сильно нелинейного неинвертирующего широкополосного усилителя, линейного четырехполюсника связи, линии задержки и устройства, обеспечивающего временну́ю регулировку коэффициента усиления (рис. 1). В качестве нелинейного усилителя можно использовать двухкаскадный реостатный усилитель, один из каскадов которого может работать в линейном режиме [1], и однокаскадный трансформаторный усилитель. Роль четырехполюсника связи выполняет межкаскадная реостатно-емкостная цепь связи или трансформатор. Регулировка усиления обычно [1] осуществляется при помощи RC-цепи смещения усилителя.

В зависимости от выбора режима работы усилителя, параметров линии задержки, четырехполюсника связи, RC-цепи смещения и, наконец, от вида внешнего возмущающего сигнала можно получить большое разнообразие форм колебаний в установившемся режиме.

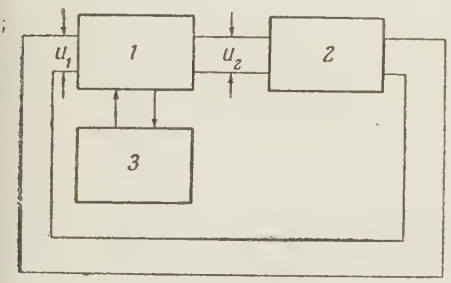


Рис. 1. Скелетная схема генератора:
1 — нелинейный усилитель; *2* — четырехполюсник связи и линия задержки; *3* — элемент регулировки усиления

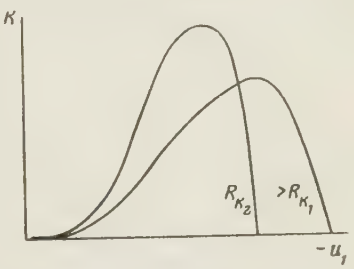


Рис. 2. Графики зависимости коэффициента усиления от напряжения базового смещения

Полупроводниковые генераторы с запаздыванием имеют некоторые особенности, вызванные спецификой свойств полупроводниковых триодов. Зависимость коэффициента усиления полупроводникового апериодического усилителя от величины напряжения смещения применительно к триодам типа $p — n — p$ имеет вид, показанный на рис. 2. При малом напряжении отрицательного смещения триод находится на грани запирания, коэффициент усиления близок к нулю. При некотором напряжении он достигает максимума. При дальнейшем увеличении напряжения отрицательного смещения ток коллектора достигает значений, близких к $E_к/R_к$, где $E_к$ — напряжение источника питания коллектора; $R_к$ — сопротивление коллектора. Напряжение на коллекторе триода при этом приближается к нулю, рабочая точка выходит на линию критического режима, а коэффициент усиления падает до нуля. Если в ламповом генераторе при получении колокольных импульсов рабочую точку можно выбрать только на грани отсечки [1], то в полупроводниковом генераторе рабочая точка может быть выбрана на грани отсечки или на грани насыщения триода (рис. 2). В зависимости от этого полярность импульсов будет или положительной, или отрицательной. Режим работы, соответствующий началу насыщения триода, легко реализуется и при генерировании импульсов колокольной формы ему следует отдавать предпочтение. Объясняется это тем, что в этом случае резче выражена зависимость $K = f(u_1)$, и поэтому длительность импульсов оказывается меньше.

Преимущество полупроводниковых генераторов с запаздывающей обратной связью перед релаксационными полупроводниковыми генераторами обычного типа (мультивибраторами и блокинг-генераторами) заключается в том, что в них исключается режим глубокого насыщения триода. Что касается времени задержки сигнала, имеющей место при его усилении полупроводниковым усилителем, то оно суммируется со временем задержки линии и никакого влияния на крутизну фронтов импульсов не оказывает. Поэтому представляется возможным реализовать высокие частотные свойства дрейфовых триодов и получить импульсы длительностью около 0,05 *мксек*. Максимальная частота повторения импульсов может иметь величину порядка $5 \cdot 10^6$ *имп/сек*.

Полупроводниковый регенеративный генератор импульсов с запаздыванием может быть выполнен на двух (рис. 3, *а*) и на одном триоде (рис. 3, *б*). Делители двухкаскадного генератора, составленные из сопротивлений R_1 R_2 и R_3, R_4, позволяют осуществить выбор режима работы каскадов усилителя. Поскольку полярность импульсов, действующих на их входе, противоположна, режимы их работы целесообразно делать разными. Так, при получении на коллекторе триода T_2 (рис. 3, *а*) импульсов отрицательной полярности режим работы его должен быть близким к режиму насыщения. Триод T_1 при этом должен быть на грани отсечки. В этом случае удается ис-

пользовать укорачивающее действие обоих каскадов усилителя и получить импульсы меньшей длительности. Цепочки $R_э C_э$ эмиттера (рис. 3, *а*) обусловливают мягкое возникновение автоколебаний, стабилизируют режимы работы триодов и обеспечивают регулировку усиления усилителя.

Более простым в наладке и надежным в работе является генератор, схема которого представлена на рис. 3, *б*. Трансформатор служит для инверсии фазы трансформируемого напряжения. Как и в предыдущем генераторе, делитель R_1, R_2 и цепь $R_э C_э$ обеспечивают выбор требуемого режима работы и регулировку усиления. Сопротивление и конденсатор цепи автоматического смещения $R_э C_э$ можно перенести в цепь базы. В этом случае амплитуда импульсов увеличивается и может достигнуть 50—75% напряжения источника питания коллектора. При трансформаторе с третьей нагрузочной обмоткой можно получить требуемые амплитуды и полярность импульсов

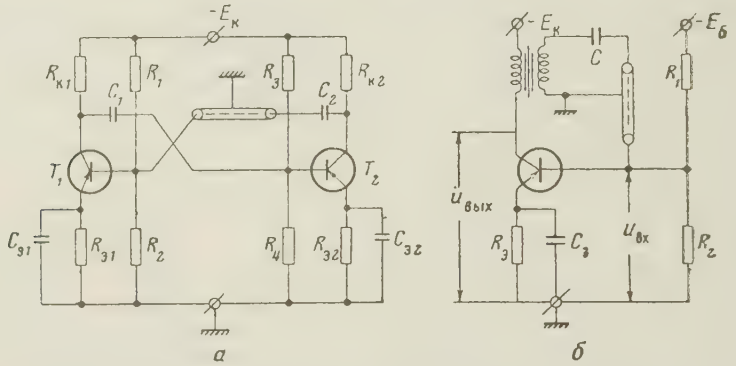


Рис. 3. Принципиальные схемы двухкаскадного (*а*) и одно-каскадного (*б*) генераторов импульсов с запаздывающей обратной связью

Целью описываемого эксперимента являлась качественная проверка работоспособности и эффективности рассмотренных полупроводниковых генераторов с запаздывающей обратной связью.

Двухкаскадный генератор по схеме рис. 3, *а* на триодах типа П-402 при $E_к = -10$ $R_1 = 22$ *ком*, $R_2 = R_{к1} = R_{к2} = 1{,}2$ *ком*, $R_3 = 13$ *ком*, $R_4 = 2{,}2$ *ком*, $R_{э1} = 680$ *ом*, $R_{э2} = 120$ *ом*, $C_1 = C_2 = 6800$ *пф*, $C_{э1} = 1000$ *пф*, $C_{э2} = 400$ *пф* и при использовании в качестве линии задержки высокочастотного коаксиального кабеля позволяет получить на коллекторе триода T_2 импульсы почти колокольной формы отрицательной полярности с минимальной длительностью $t_{и2} = 0{,}05$ *мксек* и максимальной

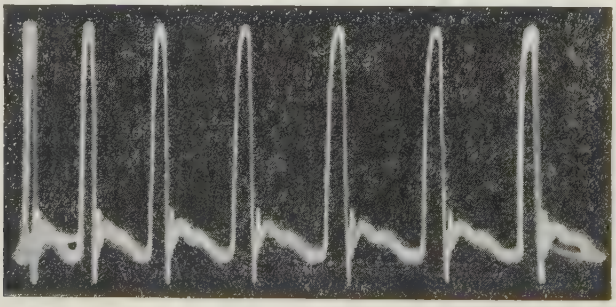


Рис. 4. Осциллограммы импульсов

частотой повторения около 5 *Мгц*. Замена кабеля фильтром нижних частот с сосредоточенными параметрами приводит к некоторому увеличению длительности импульсов. Амплитуда импульса при этом составляла 1—1,5 *в*. Генератор весьма критичен к параметрам цепочек эмиттера $R_э C_э$ Изменение их значений по сравнению с указанными выше приводит к появлению других видов колебаний.

Однокаскадный генератор, собранный по схеме, показанной на рис. 3, *б*, оказался более надежным и высокоэффективным. На триоде П-402 при $E_к = -10$ *в*, $R_э = 120$ *ом*, $C_э = 510$ *пф*, $R_1 = 2$ *ком* и $R_2 = 1$ *ком* были получены импульсы почти колокольной формы с амплитудой около 3—4 *в*, длительностью около 0,08 *мксек* и максимальной

частотой повторения около 4 *Мгц*. Число витков коллекторной обмотки трансформатора 45; базовой обмотки — 15; сердечник — ферритовое кольцо с внешним диаметром около 8 *мм*. Замена кабеля фильтром нижних частот, как и в первой схеме, приводит к некоторому увеличению длительности импульса. Применение триода типа П13А в однокаскадном генераторе дало результаты, близкие к описанным выше. Это дает основание надеяться, что однокаскадный генератор с фильтром нижних частот может найти широкое применение как генератор кратковременных импульсов с высокостабильной и большой частотой повторения.

На рис. 4 показаны осциллограммы импульсов отрицательной полярности, полученные при помощи двухкаскадного генератора (рис.3, *а*) при использовании линии задержки, выполненной в виде фильтра нижних частот с полосой пропускания $\Delta f = 5$ *Мгц*, волновым сопротивлением $\rho = 1$ *ком* и временем задержки $\tau = 1$ *мксек*. Период повторения импульсов на указанной осциллограмме равен 1 *мксек*.

Длительность импульса незначительно растет с увеличением времени задержки, что связано с большим затуханием за счет активных потерь высокочастотных составляющих спектра импульса. Изменение температуры в широких пределах приводило лишь к незначительному изменению формы импульса и не оказывало влияния на его период повторения.

Экспериментальные исследования также показали, что генерирование импульсов колокольной формы возможно и при использовании генератора с отрицательной обратной запаздывающей связью. В этом случае длительность импульса существенно зависит от времени задержки. Однако детальное рассмотрение этого генератора выходит за рамки настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. C. Cutler, Regenerative pulse generator, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 2, 140.
2. Г. В. Глебович, Л. А. Моругин, Формирование импульсов наносекундной длительности, Изд. Советское радио, 1958.

Поступило в редакцию
21 III 1960
После переработки
29 V 1961

ТЕРМОЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА ГАФНАТОВ И РЕНАТОВ БАРИЯ

Б. В. Бондаренко, С. В. Ермаков, Б. М. Царев

В связи с результатами исследования [1] термоэлектронных свойств танталатов бария, оказавшихся несколько лучшими термоэлектронных свойств вольфраматов бария, возник вопрос о необходимости исследования эмиссии также ренатов и гафнатов бария. Исследованию были подвергнуты гафнаты бария типа $(BaO)_n\,(HfO_2)_m$ составов $n : m = 2 : 1;\ 3 : 1;\ 5 : 1;\ 7 : 1$ и ренаты бария $(BaO)_n\,(Re_2O_7)_m$ составов $n : m = 1 : 1;\ 2 : 1;\ 3 : 1;\ 5 : 1;\ 7 : 1$.

Исследование ренатов и гафнатов бария с разным содержанием окиси бария было необходимо для выяснения влияния содержания окиси бария на термоэлектронные свойства двойных окислов, а также для определения составов основных рената и гафната бария, устойчивых в вакууме при рабочих температурах.

Технология приготовления гафнатов и ренатов, а также методика измерениях их термоэлектронных свойств были подобны уже описанным [1] для вольфраматов и танталатов щелочноземельных металлов. В качестве подложки катодов использовалась вольфрамовая лента, предварительно очищенная прокаливанием в вакууме. Температура керна определялась при помощи термопары вольфрам — иридий.

Процесс активирования катодов состоял в длительном нагреве их с отбором тока эмиссии, начиная с температур появления слабой эмиссии, равной 10^{-8}—10^{-7} $a \cdot см^{-2}$, и кончая температурой, выше которой начинался необратимый спад эмиссии вследствие роста работы выхода. Вплоть до этого значения температуры, которое отмечалось как температура активирования, имело место, как правило, резкое падение работы выхода в процессе активирования. В качестве примера приведены кривые активирования для основных рената и гафната бария (см. кривые *а* на рис. 1 и 2).

После окончания активирования катодов производилось измерение эмиссии в широком диапазоне температуры. При этом делалось несколько проходов вверх и вниз по шкале температур до тех пор, пока не получались стабильные и воспроизводимые, при каждом значении температуры, величины тока эмиссии (кривые стабильного состояния эмиссии *б* также показаны на рис. 1 и 2).

Все исследованные нами вещества обладали минимумом работы выхода в соответствии с их полупроводниковыми свойствами, описываемыми простейшей моделью дорного полупроводника.

Термоэлектронные свойства гафнатов и ренатов бария

Состав соединения	Температура активирования, °К	$\varphi_{мин}$ при T, °К	φ_T, *эв* при $T = 1250$ °К	φ_0, *эв*	A, $a \cdot см^{-2} \times град^{-2}$
$2BaO \cdot HfO_2$	1200	2,12 1000	2,20	1,57	$7{,}5 \cdot 10^{-1}$
$3BaO \cdot HfO_2$	1200	2,08 1000	2,18	1,49	$5{,}4 \cdot 10^{-1}$
$5BaO \cdot HfO_2$	1200	1,98 950	2,17	1,42	$1{,}15 \cdot 10^{-1}$
$7BaO \cdot HfO_2$	1200	1,96 900	2,16	1,35	$6{,}4 \cdot 10^{-2}$
$BaO \cdot Re_2O_7$	1450	2,92 1100	2,94	1,69	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$
$2BaO \cdot Re_2O_7$	1300	2,55 1000	2,68	1,43	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$
$3BaO \cdot Re_2O_7$	1300	2,47 1000	2,57	1,57	$1{,}1 \cdot 10^{-1}$
$5BaO \cdot Re_2O_7$	1350	2,35 1000	2,44	1,67	$1{,}15 \cdot 10^{-2}$
$7BaO \cdot Re_2O_7$	1350	2,27 1000	2,38	1,51	$7{,}4 \cdot 10^{-2}$

Линейный ход температурной зависимости работы выхода в области выше тем пературы, при которой наблюдался минимум работы выхода, позволил вычислит значения постоянных φ_0 и A уравнения прямой Ричардсона

$$j = AT^2 \exp\left[-\frac{e\varphi_0}{kT}\right]$$

по значениям $\frac{\Delta\varphi}{\Delta T}$ согласно уравнений

$$A = A_0 \exp\left[-\frac{e}{k}\frac{\Delta\varphi}{\Delta T}\right],$$

$$\varphi_0 = \varphi_T - \frac{\Delta\varphi}{\Delta T}T,$$

где A_0 — универсальная постоянная, равная $4\pi mk^2e/h^3 = 120{,}4$ $a \cdot см^{-2} град^{-2}$; φ_T работа выхода в уравнении эмиссии в виде

$$j = A_0T^2 \exp\left[-\frac{e\varphi_T}{kT}\right].$$

Термоэлектронные свойства исследованных нами составов гафнатов и ренат бария указаны в таблице. Сравнивая значения работ выхода φ_T при 1250°К для га ната бария $2BaO \cdot HfO_2$ ($\varphi_T = 2{,}20$ *эв*), танталата $5BaO \cdot Ta_2O_5$ ($\varphi_T = 2{,}30$ *эв*), вольфр

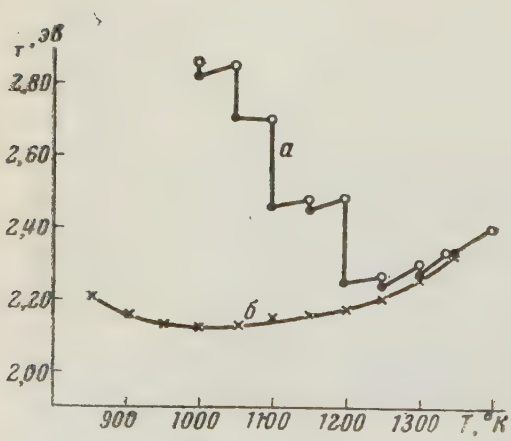


Рис. 1

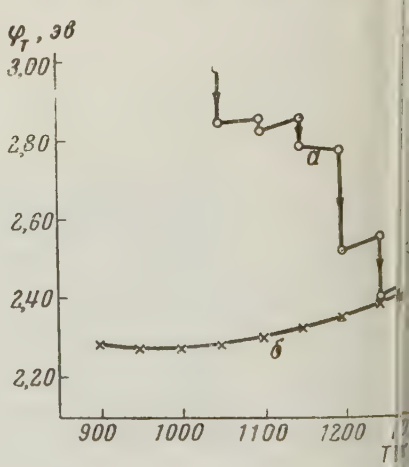


Рис. 2

Рис. 1. Кривые активирования (*а*) и стабильной эмиссии (*б*) для основного состава га ната бария $2BaO \cdot HfO_2$

Рис. 2. Кривые активирования (*а*) и стабильной эмиссии (*б*) для основного состава р ната бария $7BaO \cdot Re_2O_7$

мата $3BaO \cdot WO_3$ ($\varphi_T = 2{,}61$ *эв*) и для рената бария $7BaO \cdot Re_2O_7$ ($\varphi_T = 2{,}38$ *эв*), мы в дим, что ренаты и особенно гафнаты бария обладают несколькими лучшими эми сионными характеристиками, чем соответствующие вольфраматы и даже танталат

Однако для окончательных рекомендаций относительно возможности использования гафнатов и ренатов бария в качестве активных веществ для различного рода прессованных термокатодов необходимы еще дополнительные исследования их испаряемости и термостойкости в рабочих условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Бондаренко, Е. П. Остапченко, Б. М. Царев, Термоэлектронные свойства вольфраматов щелочноземельных металлов, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 8, 1246.

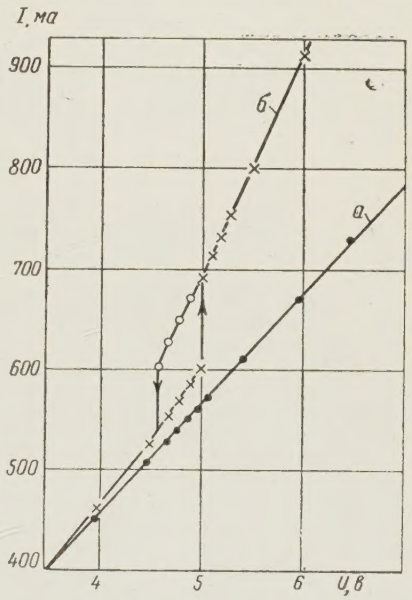
Поступило в редакцию
15 VI 1960

АНОМАЛЬНАЯ ВОЛЬТАМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЛЕГИРОВАННОГО ГЕРМАНИЯ

Ф. Я. Надь

На образце германия, легированного золотом с паянными индиевыми контактами, нами наблюдалась аномальная вольтамперная характеристика, а также возникновение генерации синусоидальных колебаний в цепи, состоящей из последовательно соединенных образца, нагрузочного сопротивления и батареи.

Монокристаллический однородный образец Ge *p*-типа содержал примесь атомов золота в концентрации $3 \cdot 10^{15}$ *см*$^{-3}$ при степени компенсации 0,01. Образец размером $1 \times 1{,}5 \times 12$ *мм*^{3} помещался в криостат, обеспечивавший охлаждение до температуры 80°K. При этой температуре образец имел сопротивление ~9 *ком*. Вид вольтамперной характеристики зависел от полярности приложенного к образцу напряжения. При одном направлении тока вольтамперная характеристика линейна и не имеет особенностей (см. рисунок, кривая *а*). Изменение полярности напряжения, приложенного к образцу, приводит к существенному изменению вида вольтамперной характеристики: увеличение напряжения на образце вызывает в некоторой точке, соответствующей 4,98 *в*, скачкообразное возрастание тока (кривая *б* на рисунке). При дальнейшем увеличении напряжения ток продолжает расти линейно, однако с другим (бо́льшим) наклоном характеристики.



На обратном ходе вольтамперной кривой скачок тока наступает при другом, меньшем напряжении — 4,6 *в*. Вольтамперная кривая образует характерную гистерезисную петлю *. Включая образец в цепь последовательно с омической нагрузкой ($R_{нагр} \simeq R_{обр}$) и батареей (емкость монтажа всей схемы и соединительных проводов составляла примерно 100 *пф*) и регулируя напряжение последней, можно было наблюдать возникновение устойчивой генерации синусоидальных колебаний с частотой около 500 *кгц* и амплитудой ~70 *мв*. Генерация возникала только при полярности напряжения, соответствующей наличию участка гистерезиса.

Освещение образца белым светом (от лампы накаливания) через окно в криостате приводило к прекращению генерации. После выключения света генерация возникала вновь, причем амплитуда генерируемого напряжения медленно нарастала с постоянной времени ~1 *мин* от нуля до первоначального значения. То обстоятельство, что описанное явление исчезало при перемене полярности напряжения, по-видимому, указывает на его связь с процессами, происходящими на контактах.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Bube, J. Appl. Phys., 1960, 31, 12, 2239.

Поступило в редакцию
8 IV 1961

* Аналогичные вольтамперные характеристики наблюдал Бьюб [1] на поликристаллических образцах CdS.

По просьбе Национального Комитета Советского Союза по автоматическому уп равлению редакция помещает следующую информацию.

В марте 1961 г. в г. Бергене (Норвегия) состоялось очередное заседание Исполни тельного Совета Международной Федерации по автоматическому управлению (ИФАК под председательством Президента ИФАК проф. А. М. Летова. Исполнительный Сове ИФАК принял следующее решение, касающееся проведения 2-го Конгресса ИФАК

2-й Международный Конгресс ИФАК по автоматическому управлению будет про веден в г. Базеле (Швейцария) в сентябре 1963 г.

А. Программа 2-го Конгресса ИФАК включает следующие научные направления

1. Теория автоматического управления: а) дискретные си стемы; б) стохастические процессы; в) оптимальные системы; г) самонастраивающиес системы; д) теория надежности.

2. Применение автоматического управления: а) иссле дование динамики процессов; б) изучение проблем автоматизации промышленност при помощи цифровых и моделирующих устройств, включенных и не включенны в процесс; в) применение оптимизирующих и самонастраивающихся систем регули рования.

3. Элементы: а) новые и эффективные устройства; б) оценка надежност элементов.

4. Другие темы: а) образование; б) терминология; в) библиография.

Эта программа не исключает и другие темы, но не менее 80% всех докладов должн относиться к теории и применениям и не более 20% — к элементам и другим напра лениям.

Б. Общее число одобренных докладов не должно превышать 100. Каждый докл должен быть объемом не более 30 000 печатных знаков, включая резюме на двух и трех языках и иллюстрации.

В. Отбор докладов будет проводиться Национальными Комитетами ИФА которые должны: а) обратиться к специалистам с приглашением прислать доклады перечисленные темы; б) найти специалистов, которые смогут дать отзывы и провес предварительный отбор докладов; в) сообщить авторам, что доклады следует прис лать в Национальный Комитет Советского Союза по автоматическому управлени (Москва, И-53, Каланчевская ул., 15-а) не позднее 31 декабря 1961 г. Авторы мог представлять доклады на русском, английском, французском и немецком языках, пр чем каждый доклад должен иметь резюме объемом не более 200 слов как на язы оригинала, так и на русском или английском языке.

Окончательный отбор докладов для 2-го Конгресса ИФАК будет проведен Ком тетом ИФАК по докладам в составе: председателя — проф. Эд. Гереке (Швейцари и членов — председателей Технических Комитетов ИФАК. Комитет ИФАК по до кладам будет руководствоваться следующими принципами при вынесении решени 1) актуальностью темы; 2) значимостью полученных результатов и их новизно 3) ясностью изложения.

Председатель
Национального Комитета СССР
по автоматическому управлению
академик *В. А. Трапезников*

MTA Számítástechnikai
Könyvtára

CONTENTS

Sharov A. I. Ideal signal reception of an ideal code 1595
Perepeliatnik P. A. Oscillations in an oscillator with delay 1601
Yakovlev V. P. Synchronization of a selfoscillator by a modulated weak external force 1609
Grigoriev Yu. V., Khokhlov R. V. Autooscillator parametrically coupled with a linear circuit 1617
Men A. V. Time characteristics of phase difference fluctuations at tropospheric radiowave propagation 1625
Bakhareva M. F. Frequency correlation of amplitude and phase fluctuations using a high-directional antenna 1636
Sui Ien-shen. Influence of a metal wall on magnetostatic oscillations of a small gyrotropic sphere 1645
Kinber B. E. Electromagnetic waves diffraction on concave spherical surface . . 1652
Kolpakov V. V. Surface electromagnetic waves diffraction on the impedance step of a circular cylinder 1658
Smorgonskiy V. Ya. Self-frequencies of the highest modes in a coaxial cable with elliptical conductors 1665
Dnestrovskiy Yu. N., Kostomarov D. P. On one non-linear problem of an electromagnetic waves theory in plasma 1667
Didenko A. N., Bezmaternich L. N. Calculation of rectangular waveguides loaded with dielectric diaphragms 1670
Nikolskiy V. V., Sukhov V. G. Ritz method for hollow systems with anisotropic medium 1677
Loshakov L. N. Suitable form for expression of a coupling coefficient for interaction of an electron flow with space harmonics of a delay system 1685
Glasko V. B., Ziuzin-Zinchenko A. A., Lopukhin V. M. Influence of the pulsation of an electron flow on TWT noise 1688
Lugovoi V. N. Maser on NH_3 with two self-frequencies of the cavity in the range of the radiation line 1700
Fabrikov B. A. New method of microwave amplification by ferrites 1707
Sokolik A. I. Equivalent network of the deflecting plates of an electron-beam tube 1718
Strashkevich A. M. Electrostatic quadrupole lense with the field having two plates of antisymmetry and no plates of symmetry 1725
Basalaeva N. Ya., Ekimenko T. M., Elinson M. I., Zernov D. V., Savitskaya Ya. S., Yasnopolskaya A. A. Investigation of some properties of cold MgO cathode with molter-type emission 1729
Vasiliev G. F. Electric field penetration in semi-conductor 1741
Pervova L. Ya. Determination of the life-time of excess-carriers in semi-conductors using spectral distribution of noise density 1745
Kurkin Yu. L., Kurkina N. S. Precision transistor amplifiers for electronic models with high input-(output) resistances 1749

BRIEF REPORTS

Yashkin A. Ya. Connection between the method of an indefinite coefficient and the method of an integral equation 1757
Mandelstam M. Ya. Controlled directional coupler with constant phase shift . . 1761
Zaltsman E. B., Poyarkova V. E. «Perturbation» of H_{01n} resonator by a cylindrical rod 1764
Shushpanov O. E. Coupling coefficient for bent round coaxial waveguide 1767
Bronstein I. M., Fraiman B. S. Secondary and photoelectron emission of Ba with adsorbed layers of Be and Ag 1769
Yakovlev V. N. Investigation of semiconductor pulse oscillator with delay back coupling 1770
Bondarenko B. V., Ermakov S. V., Tsarev B. M. Thermoelectron properties of hafnates and renates of barium 1773
Nad F. Ya. Anomalous voltampere characteristic of doped germanium 1775

Цена 1 руб. 38 коп.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

на журналы Издательства Академии наук СССР на 1962 год

Название журнала	Кол-во номеров в год	Подписная цена	
		Годовая	Полугодовая
Общеакадемические журналы			
Вестник Академии наук СССР	12	9—60	4—80
Доклады Академии наук СССР (без папок)	36	51—84	25—92
Доклады Академии наук СССР (с 6-ю коленкоровыми папками с тиснением)	36	54—24	27—12
Природа	12	8—40	4—20
Физико-математические науки			
Акустический журнал	4	4—80	2—40
Астрономический журнал	6	9—90	4—95
Геомагнетизм и аэрономия	6	9—00	4—50
Журнал вычислительной математики и математической физики	6	9—00	4—50
Журнал технической физики	12	12—60	6—30
Журнал экспериментальной и теоретической физики	12	28—80	14—40
Известия Академии наук СССР:			
серия геофизическая	12	18—00	9—00
серия математическая	6	9—00	4—50
серия физическая	12	14—40	7—20
Кристаллография	6	9—00	4—50
Математический сборник	12	14—40	7—20
Оптика и спектроскопия	12	16—20	8—10
Приборы и техника эксперимента	6	9—78	4—89
Теория вероятностей и ее применения	4	4—52	2—26
Физика твердого тела	12	30—00	15—00
Химические науки			
Высокомолекулярные соединения	12	15—00	7—50
Геохимия	12	9—00	4—50
Журнал аналитической химии	6	7—20	3—60
Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии	6	4—50	2—25
Журнал неорганической химии	12	27—00	13—50
Журнал общей химии	12	33—00	16—50
Журнал прикладной химии	12	22—56	11—28
Журнал физической химии	12	27—00	13—50
Известия Академии наук СССР. Отделение химических наук	12	18—00	9—00
Коллоидный журнал	6	7—20	3—60
Нефтехимия	6	7—50	3—75
Радиохимия	6	7—20	3—60
Успехи химии	21	9—60	4—80

Название журнала	Кол-во номеров в год	Подписная цена
		Годовая
Геолого-географические науки		
Геология рудных месторождений	6	7—20
Записки Всесоюзного минералогического общества	6	7—20
Известия Академии наук СССР		
серия географическая	6	9—00
серия геологическая	12	14—40
Известия Всесоюзного географического общества	6	5—40
Океанология	6	9—00
Биологические науки		
Биофизика	6	7—20
Биохимия	6	10—80
Ботанический журнал	12	18—00
Вопросы ихтиологии	4	6—00
Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова	6	9—00
Журнал общей биологии	6	4—50
Зоологический журнал	12	18—00
Известия Академии наук СССР:		
серия биологическая	6	9—00
Микробиология	6	9—00
Палеонтологический журнал	4	6—00
Почвоведение	12	14—40
Радиобиология	6	7—50
Успехи современной биологии	6	4—80
Физиологический журнал СССР им. И. М. Сеченова	12	14—40
Физиология растений	6	7—20
Цитология	6	7—20
Энтомологическое обозрение	4	9—00
Технические науки		
Автоматика и телемеханика	12	13—56
Известия Академии наук СССР:		
Отделение технических наук:		
металлургия и топливо	6	7—50
механика и машиностроение	6	7—50
энергетика и автоматика	6	7—50
Инженерный журнал	4	6—00
Прикладная математика и механика	3	10—80
Радиотехника и электроника	12	16—50

Подписка принимается повсеместно в пунктах подписки «Союзпечати», почтамтах, конторах деления связи, общественными уполномоченными на заводах и фабриках, в научно-исследовате институтах, учебных заведениях и организациях, а также отделениями и магазинами «Академ и конторой «Академкнига» по адресу:

МОСКВА, ЦЕНТР, Б. ЧЕРКАССКИЙ ПЕР., 2/10

1961 ОК